Stochastik

Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1 (6 Punkte).

Sei $X_\lambda \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{\mathrm{d}} Y, \tag{1}$$

wobei $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Hinweis Nr.1. Benutzen Sie momenterzeugende Funktionen.

Hinweis Nr.2. Wenn man die erzeugende Funktion $G_X(z)$ einer ZV X für $|z| < r$ kennt, dann ist $M_X(t) = G_X(\mathrm{e}^t)$ für $|t| < \log r$.

Aufgabe 10.2 (4 Punkte).

Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Zeigen Sie, dass $M_X(t) = \mathrm{e}^{t^2/2}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 10.3 (6 Punkte).

Sei $S_n = X_1+X_2+\ldots+X_n$ eine Summe von u.i.v. ZVen $\{X_i\}_{i=1}^\infty$. Definiere $\bar{X}_n = S_n/n$. Sei $\mu := \mathbb{E}[X_1]$. Sei $M_{X_1}(t) < \infty$ für $|t| \le t_0$ für $t_0 > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $M_X(t) \underset{t\to 0}{=} 1 + t\mu + o(t)$.

(b) Zeigen Sie, dass $M_{\bar{X}_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{t\mu}$.

(c) Zeigen Sie, dass $\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} \mu$.

Aufgabe 10.4 (4 Punkte).

Sei

$$M_X(t) = \frac{1}{6}(4 + \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}), \quad t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

die momenterzeugende Funktion von ZV X.

(a) Geben Sie das erste und das zweite Moment der ZV X an.

(b) Geben Sie die Verteilungsfunktion von ZV X an. **Hinweis:** X ist eine einfache diskrete ZV.