# Stochastik

## Übungsblatt 11

**Aufgabe 11.1 (6 Punkte).** Sei $X$ eine stetige ZV mit der Dichtefunktion $f$. Zeigen Sie, dass die ZV $X$ symmetrisch ist (d.h. $X \sim -X$) **genau dann**, wenn die charakteristische Funktion $\chi$ von $X$ reelwertig ist (d.h. $\mathrm{Im}\chi(t) \equiv 0$).

**Aufgabe 11.2 (4 Punkte).** Sei $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine Folge von unabhängigen Cauchy-verteilten ZVen. Die Dichte der Cauchy-Verteilung ist

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

und die charakteristische Funktion von $X_1$ ist

$$\chi(t) = \mathrm{e}^{-|t|}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

(a) Geben Sie die Verteilung von $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ an.

(b) Gilt das GGZ für $\bar{X}_n$?

(c) Ist $\mathbb{E}[X_1]$ endlich?

**Aufgabe 11.3 (6 Punkte).** Sei $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine Folge von u.i.v. ZVen mit $\mathbb{E}[X_1] = 0$ und $\mathrm{Var}[X_1] = 1$. Zeigen Sie, dass die folgenden zwei Folgen von ZVen

(a) $\left\{\frac{X_1+X_2+\ldots X_n}{\sqrt{X_1^2+X_2^2+\ldots X_n^2}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$,

(b) $\left\{\sqrt{n}\frac{X_1+X_2+\ldots X_n}{X_1^2+X_2^2+\ldots X_n^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

als $n \to \infty$ gegen eine Gauß'sche ZV in Verteilung konvergieren. Geben Sie die Parametern dieses Grenzwertes (den Erwartungswert und die Varianz) an.

**Hinweis**: Benutzen Sie die folgende Aussage (Satz von Slutzky). Ist $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{D}} X_\infty$ und $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{D}} c$, wobei $c$ eine Konstante ist, so gilt $X_n Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{D}} cX_\infty$. (Diese Aussage müssen Sie nicht Beweisen.)

**Aufgabe 11.4 (4 Punkte).** Sei $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine Folge von u.i.v. ZVen. Sei $F_X$ die Verteilungsfunktion von $X_1$. Wir definieren $M_n := \max_{i=1}^{n} X_i$.

(a) Geben Sie die Verteilungsfunktion von $M_n$ an.

(b) Sei $X_1$ eine nach oben unbeschränkte ZV. D.h. $\mathbb{P}\{X \geq x\} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{D}} +\infty$. D.h. $\mathbb{P}\{M_n \leq x\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.