Stochastik

Übungsblatt 12

Aufgabe 12.1 (6 Punkte).

(a) Sei X und Y zwei ZVen jeweils mit Verteilungsfunktionen F_X und F_Y. Sei $\mathbb{P}\{X > Y\} = 1$. Zeigen Sie, dass $F_X(x) < F_Y(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Sei F und G zwei Verteilungsfunktionen mit $F(x) < G(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es zwei ZV X und Y auf dem selben WRaum existieren, so dass $X > Y$ und $F(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\}$ und $G(x) = \mathbb{P}\{Y \leq x\}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 12.2 (4 Punkte). Sei $X \sim \text{Uniform}[0, 1]$. (D.h. die ZV X ist stetiggleichverteilt auf $[0, 1]$). Geben Sie die Dichte von der ZV $1/X$ an.

Aufgabe 12.3 (6 Punkte). Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die durch

$$F(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^x, & x < 0 \\ \frac{3}{4} + x, & x \in [0, \frac{1}{8}) \\ 1, & x \in [\frac{1}{8}, +\infty) \end{cases} \tag{1}$$

gegeben ist.

(a) Zeigen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion einer gemischten ZV X ist.

(b) Geben Sie die partielle Dichte von X und die Liste der möglichen Werten und deren Wahrscheinlichkeiten für die diskrete Komponente von X an.

Aufgabe 12.4 (4 Punkte). Sei X und Y zwei unabhängige (allgemeine, also nicht unbedingt diskrete oder stetige) ZVen. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]. \tag{2}$$

(Vorausgesetzt ist, dass alle Erwartungswerte in (2) endlich sind.)