

Stochastik

ÜBUNGSBLATT 13

Aufgabe 13.1 (6 Punkte).

Sei $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ eine Stichprobe, wobei $\{X_i\}_{i=1}^n$ u.i. $\text{Poisson}(\lambda)$ -verteilte ZVen sind. Hier ist $\lambda \in (0, +\infty)$ der unbekannte Parameter. Zeige, dass $T(X) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ein erwartungstreuer Schätzer für λ ist und berechne das Risiko dieses Schätzers.

Aufgabe 13.2 (6 Punkte). Sei F_n die empirische Verteilungsfunktion von der Stichprobe $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. D.h.

$$F_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq x\}}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

wobei 1_A die Indikatorfunktion der Menge A bezeichnet. Sei F die Verteilungsfunktion von X_1 .

Zeige, dass $F_n(x)$ für festes $x \in \mathbb{R}$ ein erwartungstreuer Schätzer für $F(x)$ ist. Berechne das Risiko dieses Schätzers.

Aufgabe 13.3 (6 Punkte).

Sei $X = (X_1, \dots, X_n)$ eine Stichprobe, wobei $X_1, \dots, X_n$ u.i. $\text{Uniform}[0, \theta]$ -verteilte ZVen sind. Hier ist $\theta > 0$ der unbekannte Parameter. Sei $T(X) := \max\{X_1, \dots, X_n\}$ ein Schätzer für θ . Berechne den Bias und das Risiko dieses Schätzers.

Aufgabe 13.4 (2 Punkte).

Sei $T_n: X \rightarrow \Theta$ ein Schätzer mit $R(T_n, \theta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Dann ist T_n konsistent.

Hinweis: Benutze die Tschebyscheff-Ungleichung (oder die Markov-Ungleichung).