Stochastik

Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1 (4 Punkte). Gegeben ist die Übergangsmatrix

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

(a) Hat die entsprechende Markov-Kette eine invariante Verteilung? Wenn ja, geben Sie sie an.

(b) Konvergiert diese Kette ins Gleichgewicht?

(c) Ist die Markov-Kette aperiodisch?

Aufgabe 8.2 (6 Punkte). Sei $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ eine Markov-Kette, $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Folge der Zufallsvariablen $X_0, X_2, X_4, X_6, \ldots, X_{2n}, \ldots$ ist es auch. Gebe die Übergangsmatrix der letzten Kette an.

Aufgabe 8.3 (4 Punkte). Sei S ein Zustandsraum bestehend aus Zwei Elementen: $|S| = 2$. Wir möchten die Verteilung $\mu = (2/3, 1/3)$ auf S mittels *Markov-Chain-Monte-Carlo-Verfahren* (MCMC-Verfahren) simulieren. (In diesem einfachen Fall braucht man eigentlich kein MCMC-Verfahren um μ zu simulieren. Wir möchten aber das Verfahren verstehen.) Dafür wählen wir die Vorschlagsmatrix

$$\tilde{Q} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(Mit Wörtern: Die Vorschläge sind gleichverteilt.)

(a) Berechnen Sie die Übergangsmatrix Q für den Metropolis-Algorithmus.

(b) Berechnen Sie die Übergangsmatrix Q für den Gibbs-Sampler.

Aufgabe 8.4 (6 Punkte). Sei $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ unser Zustandsraum. Wir möchten die Verteilung $\pi = \frac{1}{12}(4, 2, 2, 2, 2)$ auf S mittels MCMC-Verfahren simulieren. Angenommen hat der Zustandsraum zusätzlich die Struktur eines Graphs:

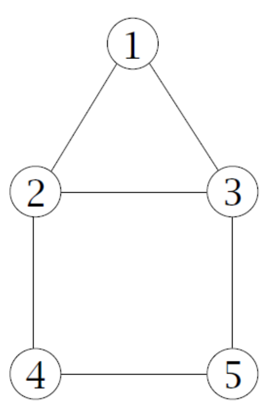

Abbildung 1: Graph (S, E).

(a) Als Vorschlagsmatrix $\tilde{Q}$ wollen wir im MCMC-Verfahren die Übergangsmatrix einer *einfachen Irrfahrt* auf (S, E) benutzen, wobei E ist die entsprechende Kantenmenge (sehe Abbildung 1). *Definition:* die einfache Irrfahrt auf einem Graphen ist die Markov-Kette, die von einem Knoten auf die benachbarte Knoten gleichverteilt springt. Geben Sie die Übergangsmatrix dieser einfachen Irrfahrt auf (S, E) an.

Empfehlung: Anstatt die komplete Matrix anzugeben kann man kompaktheitshalber die Übergangswahrscheinlichkeiten einfach neben den Kanten des Graphs schreiben. Sehe Abbildung 1.

(b) Geben Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten vom Metropolis-Algorithmus an (Also die Matrix Q). Benutzen Sie dabei die Vorschlagsmatrix $\tilde{Q}$ aus (a).