Stochastik

Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1 (6 Punkte).

Sei $\{X_i\}_{i=1}^n$ eine Folge der unabhängigen geleichverteilten auf dem Intervall $[0,1]$ ZVen. Betrachte die ZV

$$Y_n := \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Die Folge $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ ist monoton nicht steigend. Insb. wird Y_{n+1} kleiner als Y_n, sobald X_{n+1} kleiner als alle vorherige Werte $X_1, \dots, X_n$ wird. Da eine gleichverteilte auf $[0,1]$ ZV die Werte beliebig nahe an der 0 annehmen kann, ist es plausibel, dass Y_n eventuell gegen 0 konvergiert.

Zeigen Sie, dass die Folge $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ in der Tat stochastisch (= in Wahrscheinlichkeit) gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 9.2 (4 Punkte). Sei $f \in [0,1]$ der wirkliche Anteil von den Rauchern in einer großen Population. Eine Forscherin hat die Stichprobe aus n Individuen aus der Gesamtpopulation befragt, ob sie rauchen oder nicht. Sei S_n die Anzahl von Rauchern in der Stichprobe. Sei $\bar{X}_n := \frac{1}{n} S_n$. Die Forscherin hat dabei das kleinstmögliche n genommen, für das die Ungleichung von Tschebyscheff

$$\mathbb{P}\left\{|\bar{X}_n - f| \geq \epsilon\right\} \leq \delta \tag{2}$$

gilt.

Wie sollen wir diese kleinstmögliche Zahl n ändern, wenn

(a) Wir die Abweichung ϵ halbieren?

(b) Wir die Fehlerwahrscheinlichket δ halbieren?

Aufgabe 9.3 (6 Punkte). [Diese neue Aufgabe ersetzt die alte, für die die Lösung bekannt war]

Seien $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ und $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ zwei Folgen von ZVen auf einem WRaum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} a, \tag{3}$$

$$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} b, \tag{4}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ konstant sind. Sei $g\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine bivariate Funktion, die stetig im Punkt $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist. Zeigen Sie, dass die Folge von ZV $\{g(X_n, Y_n)\}_{n=1}^\infty$ in Wahrscheinlichkeit (= stochastisch) gegen die Konstante $g(a,b)$ konvergiert.

Aufgabe 9.4 (4 Punkte). Geben Sie eine intuitive (aber vielleicht nicht ganz rigorose) Erklärung, wie das schwache Gesetz der großen Zahlen (GGZ) aus dem zentralen Grenzwertsatz folgt (ZGS). Achtung: ein Grund warum solche Folgerungen nicht ganz rigoros sind ist, dass das GGZ und der ZGS verschiedene Konvergenzarten benutzen! Vergleichen Sie die Definitionen der entsprechenden Konvergenzarten.