Erwartungswert als Integral

Anton Klimovsky

Gemischte ZVen, allgemeine ZVen, Erwartungswert für allgemeine ZVen, Lebesgue-Integral bzgl. WMaß, Eigenschaften des Integrals, Lebesgue-Maß, Lebesgue-Integral auf $\mathbb{R}$.

Gemischte ZVen

Frage. Was ist der Ergebnis der Addition von einer diskreten und einer stetigen ZVen?

Definition 0.1 (gemischte ZV)**.** *Sei X eine ZV auf dem WRaum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Sei $D \subset \mathbb{R}$ höchstens abzählbar und sei $S \subset \mathbb{R}$. Wir sagen, dass Z eine **gemischte ZV** ist, falls*

(a) ***[Diskrete Komponente]*** $\mathbb{P}\{X \in D\} \in (0,1)$.

(b) ***[Stetige Komponente]*** *Für alle Intervalle $(a,b) \subset \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{P}\{X \in (a,b) \cap S\} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, wobei $f\colon S \to \mathbb{R}_+$ eine integrierbare Funktion ist.*

Eine natürliche Definition des Erwartungswerts von Z ist

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in D} x\mathbb{P}\{X = x\} + \int_S x f(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Lemma 0.1. *Sei X eine gemischte ZV. Sei D und S wie in der Definition 0.1. Wir definieren $\mathbb{P}\{X \in D\} =: p$. Dann gilt*

$$\int_S f(x)\mathrm{d}x = 1 - p. \tag{2}$$

Definition 0.2 (Partielle Dichte)**.** *Die Funktion $f\colon S \to \mathbb{R}$ wird die **partielle Dichte** gennant.*

Frage. Können wir die zwei Summanden in (1) unter einem Dach bringen?

Allgemeine reelwertige ZVen

Wir erinnern uns an die folgende Definition.

Definition 0.3 (Verteilungsfunktion)**.** *Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit*

(a) *F ist monoton nicht fallend.*

(b) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *und* $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

(c) *F ist rechtsstetig, d.h.* $\lim_{\varepsilon \to +0} F(x + \varepsilon) = F(x)$.

Wir sagen, dass F eine ***Verteilungsfunktion*** *ist.*

Definition 0.4 (Verallgemeinerte inverse Funktion)**.** *Sei F monoton nicht fallend. Wir sagen, dass die Funktion*

$$F^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} \colon F(x) \geq y\} \tag{3}$$

die ***verallgemeinerte inverse Funktion***[1] *von F ist.*

[1] Alternativ sagt man: "Quantilfunktion"

Theorem 0.1 (Eigenschaften der verallgemeinerten inversen Fuktion)**.** *Sei $F \colon \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Verteilungsfunktion. Dann gilt*

(a) *F^{-1} ist monoton nicht fallend.*

(b) *$F^{-1}(F(x)) \leq x$.*

(c) *$F(F^{-1}(y)) \geq y$.*

(d) ***[Linksstetigkeit]*** *$F^{-1}(y-) = F^{-1}(y)$.*

(e) ***[Limite von rechts]*** *$F^{-1}(y+) = \inf\{x \in \mathbb{R} \colon F(x) > y\}$.*

Beweis. Folgt direkt aus der Definition. Z.b.

(c) Für den Wert $x := F^{-1}(y)$ gilt $F(x) \geq y$.

□

Definition 0.5 (Quantile)**.** *Sei $F \colon \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Verteilungsfunktion. Wir sagen, dass $F^{-1}(q)$ das q-Quantil von F ist.*

Theorem 0.2 (Universalität der Gleichverteilung)**.** *Sei $F \colon \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Verteilungsfunktion. Sei $U \sim \text{Uniform}(0,1)$ eine ZV auf WRaum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann gilt*

$$X := F^{-1}(U) \tag{4}$$

ist eine ZV auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit der Verteilungsfunktion F.

In worten besagt das Theorem 0.2, dass wenn wir die Verteilungsfunktion F einer ZV X kennen, dann können wir eine ZV mit dieser Verteilungsfunktion mit Hilfe von gleichverteilten ZVen erzeugen. So mit können wir relativ unkompliziert die ZVen mit einer beliebigen Verteilung auf dem Rechner simulieren.[2]

[2] Vorausgesetzt, dass wir die Verteilungsfunktion F ausrechnen können.

Frage. Wie definiert man den Erwartungswert einer ZV mit (4)?

Erwartungswert als Lebesgue-Integral

Sei X eine allgemeine ZV auf dem WRaum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Wir möchten den Erwartungswert von X als Integral von X bzgl. $\mathbb{P}$ definieren

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega \underbrace{X(\omega)}_{\substack{\text{Realisierung} \\ \text{von } X}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)}_{\substack{\text{infinitesimale} \\ \text{Wahrscheinlichkeit} \\ \text{von } \omega}} . \tag{5}$$

INFORMELLE IDEE. Auf der rechten Seite steht eine infinitesimale gewichtete Summe von den Realisierungen der ZV $X(\omega)$ gewichtet mit den infinitesimalen Wahrscheinlichkeiten, dass diese Realisierung auftritt $\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)$. Dies ist in Einklang mit unseren vorherigen Definitionen (1).

DAS INTEGRAL auf der rechten Seite von (5) is kein Riemann'sches Integral, weil wir integrieren über die Menge Ω, die nicht unbedingt eine Untermenge von $\mathbb{R}^n$ sein soll.

FRAGE. Wie definiert man denn genau die infinitesimale Summe auf der rechten Seite von (5) für allgemeine ZVen?

Definition 0.6 (Elementare ZVen)**.** *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein WRaum. Sei $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$, $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$. Ist*

$$X = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{1}_{A_i}, \tag{6}$$

*so sagen wir, dass X eine **elementare ZV** ist.*

Lemma 0.2 (Approximation durch elementare ZV)**.** *Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}_+$ eine nicht negative ZV. Dann existiert eine monoton wachsende Folge von nicht negativen ZVen $\{X_n\}_{n=1}^\infty$, so dass*

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = \sup_{n\in\mathbb{N}} X_n(\omega) = X(\omega) \quad \textit{punktweise für alle } \omega \in \Omega. \tag{7}$$

Beweis. Sei

$$X_n := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{1}_{\frac{k-1}{2^n} \le X < \frac{k}{2^n}} + n\mathbb{1}_{X \ge n}. \tag{8}$$

Die Folge $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ ist monoton wachsend, weil die Zerlegung immer feiner für $n \to \infty$ wird. Zudem gilt

$$X_n \le X, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \quad \omega \in \Omega. \tag{10}$$

$\square$

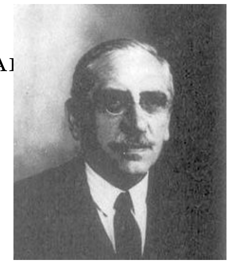

Abbildung 1: Henri Lebesgue (1875–1941) französischer Mathematiker.

Definition 0.7 (Erwartungswert für allgemeine ZVen)**.** *Sei X eine ZV auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Definiere $S := X(\Omega)$. In Worten ist S der Wertebereich von X.*

(a) ***(Erwartungswert für elementare ZV)*** *Falls S endlich ist, definiere*[3]

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in S} x \mathbb{P}\{X = x\}. \tag{11}$$

(b) ***(Erwartungswert für nicht negative ZV)*** *Falls $S \subset \mathbb{R}_+$, definiere*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] := \sup\{\mathbb{E}[Y] \,|\, Y : \Omega \to \mathbb{R}_+, |Y(\Omega)| < \infty, \\ \forall \omega \in \Omega \colon 0 \leq Y(\omega) \leq X(\omega)\}. \end{aligned} \tag{12}$$

In Wörtern steht auf der rechten Seite von (12) das Supremum von Erwartungswerten aller elementaren ZVen Y, die punktweise von X majorisiert sind (s. Abbildung 2, rot).

(c) ***(Erwartungswert für allgemeine ZV)*** *Für allgemeine $S \subset \mathbb{R}$ definiere*

$$\mathbb{E}[X] := \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-], \tag{13}$$

wobei $X^+ := (|X| + X)/2$ und $X^- := (|X| - X)/2$. Hier wird angenommen, dass zu mindestens ein von den beiden Integralen $\mathbb{E}[X^+]$ und $\mathbb{E}[X^-]$ endlich ist, so dass wir keine "$\infty - \infty$"-Situation in (13) bekommen.

[3] Dies ist nicht anderes als Erwartungswert einer diskreten ZV.

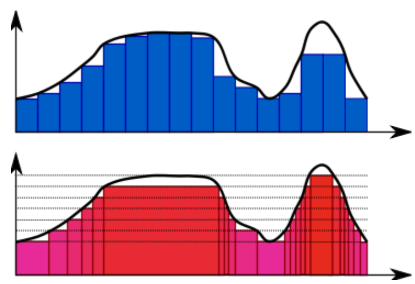

Abbildung 2: Illustration der Grenzwertbildung beim Riemann-Integral (blau) und beim Lebesgue-Integral (rot).

Definition 0.8 (Lebesgue-Integral)**.** *Definition 0.7 kann man als die Definition vom Integral auf der rechten Seite von (11) verstehen. Wir sagen, dass dies der **Lebesgue-Integral bzgl. Wahrscheinlichkeitsmaß** $\mathbb{P}$ ist.*

Theorem 0.3 (Eigenschaften vom allgemeinen Erwartungswert)**.** *Es gilt*

- ***(Linearität)*** $\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \mathbb{E}[X] + \beta \mathbb{E}[Y]$.
- ***(Monotonie)*** $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$, *falls* $X \leq Y$.
- ***(Monotone Stetigkeit)*** $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \ldots \leq X_n \leq \ldots \Rightarrow \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} X_n] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n]$.
- ***(Majorisierte Konvergenz)*** *Sei* $\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ *f.s. und* $|X_n| \leq Y$, *wobei Y eine ZV mit $\mathbb{E}[Y] < \infty$ ist*[4]. *Dann gilt* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_\infty]$.
- ***(Unempfindlichkeit)*** *Sei X, Y zwei ZVen mit $X = Y$ f.s. Dann gilt* $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$.
- ***(Produktformel)*** *Sei X und Y zwei unabhängige ZV. Dann gilt* $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

[4] Die ZV Y heißt die **integrierbare Majorante** für die Folge $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Beweis. Viele von den Aussagen kann man zuerst für die elementare ZVen nachprüfen. Beliebige ZVen kann man dann mit den elementaren approximiren. □

Zusammenhang mit dem Riemann-Integral

Im Riemann-Integral betrachten wir die feine Zerlegungen des *Definitionsbereichs* der integrierbaren Funktion (s. Abbildung 2, blau). Deswegen können wir nur die Funktionen des reelwertigen Arguments integrieren. Im Lebesgue-Integral betrachten wir feine Zerlegungen des *Wertebereichs*. In der Tat definiert jede diskrete ZV Y aus (12) die endliche Zerlegung

$$\Omega = \bigcup_{y \in Y(\Omega)} Y^{-1}(y). \tag{14}$$

Der entsprechende approximierende Integral ist dann

$$\int Y(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = \mathbb{E}[Y] = \sum_{y \in Y(\Omega)} y\mathbb{P}\left(Y^{-1}(y)\right). \tag{15}$$

S. Abbildung 2, rot. Somit können wir Funktionen $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ auf den Abstrakten Mengen Ω integrieren, die mit einem (Wahrscheinlichkeits)maß $\mathbb{P}$ ausgestattet sind.

Theorem 0.4 (Lebesgue-Integral verallgemeinert Riemann-Integral)**.** *Sei X eine gleichverteilte auf $[0,1]$ ZV auf dem WRaum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Sei $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine absolut Riemann-integrierbare Funktion. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x. \tag{16}$$

Theorem 0.5 (Kriterium der Riemann-integrierbarkeit)**.** *Sei $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Funktion f ist Riemann-integrierbar dann und nur dann, wenn f fast überall auf $[0,1]$ stetig ist.*

Example 0.1 (Dirichlet-Funktion)**.** *Funktion $f \colon [0,1] \to [0,1]$ mit $f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ heißt Dirichlet-Funktion. Diese ist nirgendwo stetig (Warum?). Somit ist sie nicht Riemann-integrierbar. Allerdings ist sie sehr wohl Lebesgue-integrierbar: $\mathbb{E}[f(X)] = 0$, da $f(X) = 0$ f.s.*

Abbildung 3: Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) deutscher Mathematiker.

Theorem 0.6 (alle beschränke ZVen sind Lebesgue-integrierbar)**.** *Sei X eine ZV auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, die beschränkt ist: $X < c$. Dann existiert $\mathbb{E}[X]$ und*

$$\mathbb{E}[X] < c. \tag{17}$$

Bildmaß

Definition 0.9 (Borel-σ-Algebra)**.** *Die **Borel-Algebra** ist die kleinste σ-Algebra $\mathcal{B}$ auf $[0,1]$, die alle Intervalle $(a,b) \subset [0,1]$ enthält.*

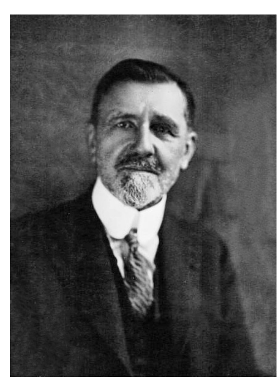

Abbildung 4: Émile Borel (1871-1956) französischer Mathematiker und Politiker.

Definition 0.10 (Bildmaß)**.** *Sei X eine ZV auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Betrachte $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_X)$, wobei $\mathcal{B}$ ist die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ und*

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}\{X^{-1}(B)\}, \quad B \subset \mathcal{B}. \tag{18}$$

*Wir sagen, dass $\mathbb{P}_X$ das **Bildmaß** von $\mathbb{P}$ unter X ist.*

Definition 0.11 (Lebesgue-Maß)**.** *Sei X eine ZV auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, die gleichverteilt auf $[0,1]$ ist. Ist $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_X)$ das Bildmaß von $\mathbb{P}$ unter X, so sagen wir, dass $\mathbb{P}_X$ ein **Lebesgue-Maß** auf $[0,1]$ ist.*

Theorem 0.7 (Transformationsformel)**.** *Sei X eine ZV und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Borel-messbare (s. Definition 0.14) Funktion. Sei $Y(\omega) := f(X(\omega))$. Dann gilt, dass Y eine ZV ist und $\mathbb{E}[Y] = \int f(x)\mathbb{P}_X(\mathrm{d}x)$, wobei $\mathbb{P}_X$ das Bildmaß von X ist (s. Definition 0.10).*

Notation. Eine Interpretation von (5) is das folgende **Lebesgue-Stiltjes-Integral** bzgl. der Verteilungsfunktion von X

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xF_X(\mathrm{d}x) \tag{19}$$

Allgemeiner benutzt man für eine beschränkte $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-messbare Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $A \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ die folgende Schreibweise

$$\int_A g(x)\mathrm{d}F_X(x) = \int_A g(x)F_X(\mathrm{d}x)\mathbb{E}[g(X)]. \tag{20}$$

Theorem 0.8. *Sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Verteilungsfunktion. Dann existiert das eindeutige WMaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ mit der Eigenschaft*

$$\mathbb{P}(a,b] = F(b) - F(a), \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Lebesgue-Maß und -Integral auf $\mathbb{R}$

Das Lebesgue-Maß und die Borel-Algebra kann man auf die ganze reelle Axe $\mathbb{R}$ sehr leicht erweitern.

Definition 0.12 (Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$)**.**

$$\mu(A) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}_X(A \cap [k, k+1)), \quad A \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \tag{22}$$

wobei

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} := \{B \subset \mathbb{R}\colon (B-k) \cap [0,1] \subset \mathcal{B}, k \in \mathbb{Z}\}. \tag{23}$$

*Wir sagen, dass $\mu\colon \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ das **Lebesgue-Maß** auf $\mathbb{R}$ ist.*

Bemerkung. So-definiertes Maß ist kein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ mehr, da $\mu(\mathbb{R}) = \infty$.

Proposition 0.1. *Sei μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$. Dann gilt*

(a) *(**Lengemaß**)* $\mu([a,b]) = b - a$.

(b) *(**Translationsinvarianz**)* $\mu(A) = \mu(a + A)$ *für* $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $a \in \mathbb{R}$.

Man kann den Begriff einer ZV wie folgt erweitern.

Definition 0.13 (Borel-messbare Funktion)**.** *Ist* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine Funktion mit*

$$\forall B \in \mathcal{B}\colon f^{-1}(B) \in \mathcal{B}, \tag{24}$$

*so sagen wir, dass f eine **Borel-messbare Funktion**[5] ist.*

[5] Dies ist eine Verallgemeinerung der Definition einer ZV. Zu Erinnerung: $X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine ZV auf dem WRaum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, falls $\{X \leq x\} = X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Definition 0.14 (Lebesgue-Integral bzgl. Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$)**.** *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine Borel-messbare Funktion. Sei*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(\mathrm{d}x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}[f(k + X)], \tag{25}$$

*wobei X ist die gleichverteilte auf $[0,1]$ ZV. Falls die Reihe auf der rechten Seite von (25) absolut konvergiert, sagen wir dass (25) der **Lebesgue-Integral** von f bzgl. Lebesgue-Maß ist.*

Literatur