Transformationen und Summen von ZVen

Anton Klimovsky

14. April 2015

Erzeugende Funktionen. Momenterzeugende Funktionen. (Characteristische Funktionen). Beweis vom ZGS.

In diesem Abschnitt werden wir einige nützliche analytische Werkzeuge kennen lernen. Diese werden uns helfen den ZGS zu beweisen.

Erzeugende Funktionen

Definition 0.1 (Momente)**.** *Sei X eine ZV. Wir sagen, dass*

$$\mathbb{E}[X^n] \in \mathbb{R} \cup \infty, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

*das n**-te Moment von** X ist*[1].

[1] Alternativ sagt man: "das Moment der Ordnung n".

Definition 0.2 (erzeugende Funktion)**.** *Sei X eine ZV mit Werten in $\mathbb{Z}_+$ und sei $p_X(k) := \mathbb{P}\{X = k\}$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X. Wir sagen, dass*

$$G(z) := \mathbb{E}[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) z^k, \quad |z| \leq 1 \tag{2}$$

*eine **erzeugende Funktion** für die ZV X ist.*

Theorem 0.1 (Wahrscheinlichkeiten und Momente)**.** *Es gilt*

(a) *(Wahrscheinlichkeiten) $G^{(k)}(0) = k! p_X(k)$ für $k \in \mathbb{Z}_+$.*[2]

(b) *(Momente) $G(1) = 1$ und $G^{(k)}(1) = \mathbb{E}[X(X-1)\ldots(X-k+1)]$ für $k \in \mathbb{N}$.*[3]

[2] Somit kann man die ganze Verteilung von X aus G_X gewinnen! Dies erklärt den Namen "erzeugende Funktion".

[3] Auf diesem Wege kann man alle Momente der ZV ausrechnen, wenn man deren erzeugende Funktion kennt.

Beweis. (a) und (b) bekommt man durch eine direkte Rechnung aus der Definition 0.2. □

Example 0.1. *Aus Theorem 0.1* (b) *folgt* $\mathbb{E}[X] = G'(1)$, $\mathrm{Var}[X] = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$.

Theorem 0.2 (Eindeutigkeitssatz für erzeugenden Funktionen)**.** *Sei X, Y zwei ZV mit $G_X \equiv G_Y$. Dann sind X und Y identisch verteilt.*

Beweis. Aus Theorem 0.1 (a), folgt dass $p_X(k) = p_Y(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}_+$. □

Erzeugende Funktionen sind extrem nützlich, wenn man mit den Summen von *unabhängigen ZVen* arbeitet.

Theorem 0.3 (Erzeugende Funktion der Summe von unabhängigen ZV)**.** *Sei X und Y zwei unabhängige ZVen. Dann gilt*

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z), \quad |z| \leq 1. \tag{3}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(z) &= \mathbb{E}[z^{X+Y}] = \mathbb{E}[z^X z^Y] \\ &= [\text{Unabhängigkeit}] = \mathbb{E}[z^X]\mathbb{E}[z^Y] = G_X(z)G_Y(z). \end{aligned} \tag{4}$$

□

Example 0.2 (erzeugende Funktionen für einige diskrete Verteilungen)**.**

- *(Bernoulli-Verteilung.) Sei* $X \sim \text{Bernoulli(p)}$*. D.h.*

$$p_X(k) = \begin{cases} p, & k = 1, \\ 1-p & k = 0. \end{cases} \tag{5}$$

  Dann gilt $G_X(z) = 1 - p + zp$*.*

- *(Binomial-Verteilung.) Sei* $X \sim \text{Bin(n, p)}$*. D.h.* $p_X(k) = \binom{n}{p} p^k (1-p)^{n-k}$*. Dann gilt* $G_X(z) = (1 - p + zp)^n$*.*

- *(Poisson-Verteilung.) Sei* $X \sim \text{Pois}(\lambda)$*. D.h.* $p_X(k) = \lambda^k \exp(-\lambda)/k!$ *für* $k \in \mathbb{Z}_+$*. Dann gilt* $G_X(z) = \mathrm{e}^{\lambda(z-1)}$*.*

- *(Geometrische-Verteilung.) Sei* $X \sim \text{Geom}(p)$*. D.h.* $p_X(k) = (1-p)p^k$ *für* $k \in \mathbb{Z}_+$*. Dann gilt* $G_X(z) = \frac{1-p}{1-pz}$*.*

Theorem 0.4 (Stabilität der Poisson-Verteilung)**.** *Sei* $X \sim \text{Pois}(\lambda_1)$ *und* $Y \sim \text{Pois}(\lambda_2)$ *zwei unabhängige Poisson-verteilte ZV. Dann gilt* $Z = X + Y \sim \text{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$*.*

Beweis. Es gilt

$$G_Z(z) = G_X(z)G_Y(z) = \mathrm{e}^{\lambda_1(z-1)}\mathrm{e}^{\lambda_2(z-1)} = \mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)(z-1)}. \tag{6}$$

Somit ist $G_Z(z)$ die erzeugende Funktion einer $\text{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$-Verteilter ZV. Theorem 0.1 (a) liefert, dass $Z \sim \text{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$. □

Ein Nachteil der erzeugenden Funktionen ist, dass diese nur für die $\mathbb{Z}_+$-wertige ZV definiert sind. Wie können wir mit den stetigen Verteilungen verfahren?

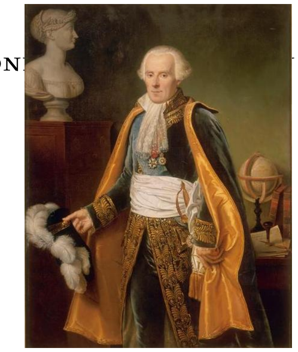

Abbildung 1: Pierre-Simon Laplace (1749–1827) französischer Mathematiker und Astronom.

Momenterzeugende Funktionen

Definition 0.3 (Momenterzeugende Funktion)**.** *Sei X eine ZV. Wir sagen, dass*

$$M_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}] \in (0, +\infty], \quad t \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

die ***Momenterzeugendefuntion***[4] *von X ist.*

[4] Alternativ sagt man, dass M_X die **Laplace-Transformierte** von X ist.

Bemerkung. Die momenterzeugende Funktion kann sehr wohl den Wert $+\infty$ annehmen. Dies geschieht z.B., falls X eine stetige ZV mit der Dichtefunktion f_X ist, die langsamer als exponentiell für $x \to +\infty$ abfällt.

Definition 0.4 (Pareto-Verteilung)**.** *Sei X eine ZV mit der Wahrscheinlichkeitsdichte*

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}, & x \in [1, +\infty), \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \tag{8}$$

wobei $\alpha > 0$ ist. Wir sagen, dass die ZV X die ***Pareto-Verteilung*** *mit der Potenz α hat.*

Example 0.3. *Sei X eine ZV mit der Pareto-Verteilung mit der Potenz α. Dann $M_X(t) = +\infty$ für $t > 0$, da der polynomiale Abfall der Dichtefunktion* (8) *gegen dem exponentiellen Wachstum von e^{tx}, für $t > 0$, als $x \to \infty$ verliert.*

Bemerkung. Man kann die momenterzeugende Funktion $M_X(t)$ einer $\mathbb{Z}_+$-wertigen ZV durch die Substitution $z = e^t$ aus der erzeugenden Funktion G_X gewinnen, falls $G_X(z) < \infty$.

Proposition 0.1 (Zusammenhang zwischen erzeugenden und momenterzeugenden Funktionen)**.** *Sei X eine $\mathbb{Z}_+$-wertige ZV. Sei G_X die erzeugende Funktion von X mit $G_X(z) < \infty$ für $|z| < r$. Dann gilt*

$$M_X(t) = G_X(e^t), \quad |t| < \log(r), \tag{9}$$

wobei M_X die momenterzeugende Funktion von X ist.

Beweis. Es gilt

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \mathbb{E}\left[\left(e^t\right)^X\right] = G_X(e^t), \quad \text{für } e^t < r. \tag{10}$$

□

Theorem 0.5 (Rechenregeln)**.** (a) *Sei $Y = aX + b$. Dann gilt $M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$, wobei X ist eine ZV und $a, b \in \mathbb{R}$ sind konstant.*

(b) *Sei X, Y zwei **unabhängige** ZVen. Dann gilt $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$, für $t \in \mathbb{R}$ mit $M_X(t), M_Y(t) < \infty$.*

Beweis. (a) Direkt nachprüfbar aus der Definition.

(b) $M_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[e^{t(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{tX}e^{tY}] = \mathbb{E}[e^{tX}]\mathbb{E}[e^{tY}] = M_X(t)M_Y(t)$. □

BEMERKUNG. Die Momente einer ZV können unendlich sein.

Example 0.4 (Momente der Pareto-Verteilung)**.** *Sei X Pareto-Verteilt mit dem Parameter α. Es gilt*

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_1^\infty x^n \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} dx = \int_1^\infty \frac{\alpha}{x^{\alpha-n+1}} dx = \begin{cases} < \infty, & n < \alpha \\ = \infty, & \textit{sonst.} \end{cases} \tag{11}$$

Folgender Satz erklärt den Namen "momenterzeugende Funktion".

Theorem 0.6 (Zusammenhang mit Momenten)**.** *Sei $M_X(t) < \infty$ für $|t| < t_0$ für irgendein $t_0 > 0$. Dann gilt:*

(a) *$M_X(t) = \sum_{k=0}^\infty t^k \mathbb{E}[X^k]/k! < \infty$ für alle $|t| \le t_0$.*

(b) *$M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}[X^k]$.*

Beweis. Für (a) können wir uns die Taylor-Reihe von e^{tX} bzgl. t-Variable bei $t = 0$ anschauen:

$$e^{tX} = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k X^k}{k!}, \quad |t| \le t_0. \tag{12}$$

Diese konvergiert, da $M_X(t) < \infty$. Es bleibt z.Z., dass wir den $\mathbb{E}$-Wert und die $\sum_k$ vertauschen können. Dies folgt aus einem sehr nützlichen **Satz der majorisierten Konvergenz**. (Später mehr dazu.)

Für (b) können wir uns die folgende Identität anschauen:

$$\frac{d^k}{dt^k} e^{tX} = X^k e^{tX}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, t \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Insb. gilt für $t = 0$

$$\frac{d^k}{dt^k} e^{tX}\Big|_{t=0} = X^k, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{14}$$

Es bleibt z.Z., dass wir den $\mathbb{E}$-Wert und die Ableitung $\frac{d^k}{dt^k}$ Vertauschen können. Die folgt auch aus den oben genannten Satz der majorisierten Konvergenz. □

Theorem 0.7 (Eindeutigkeitssatz/Umkehrsatz)**.** *Sei X und Y zwei ZV mit $M_X(t) = M_Y(t)$ für $|t| < t_0$ für irgendein $t_0 > 0$. Dann gilt $X \sim Y$.*

Ohne Beweis.

Theorem 0.8 (Stetigkeitssatz)**.** *Sei $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von ZVen und X_∞ eine ZV, so dass $M_{X_\infty}(t)$ und $\{M_{X_n}(t)\}_{n=1}^{n}$ endlich für alle $|t| < t_0$ für irgendein $t_0 > 0$ sind. Ist $M_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} M_{X_\infty}(t)$ punktweise für alle $|t| < t_0$, so gilt*

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{D}} X_\infty. \tag{15}$$

Ohne Beweis.

Example 0.5 (Momenterzeugende Funktion für die Gauß'sche Verteilung)**.** *Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX}] \\
&= \int_{\mathbb{R}} \exp(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2tx + t^2 - t^2}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-t)^2}{2}\right) \mathrm{d}x}_{=1} \\
&= \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).
\end{aligned} \tag{16}$$

Theorem 0.9 (Stabilität der Normalverteilung)**.** *Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ zwei* ***unabhängige*** *ZV. Dann gilt*

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2). \tag{17}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
M_{X+Y}(t) &= [\text{Unabhängigkeit, Theorem 0.5 (b)}] = M_X(t) M_Y(t) \\
&= [(16), \text{Theorem 0.5 (a)}] = \mathrm{e}^{\mu_1 t + \sigma_1^2 t^2/2} \mathrm{e}^{\mu_2 t + \sigma_2^2 t^2/2} \\
&= \mathrm{e}^{(\mu_1+\mu_2)t + (\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2/2}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Aus (16) und Theorem 0.5 (a) folgt, dass die rechte Seite von (18) die momenterzeugende Funktion von $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ ist. Nach Theorem 0.7 muss dies die Verteilung von $X + Y$ sein. □

Example 0.6 (Momenterzeugende Funktionen für einige stetige Verteilungen)**.**

- *(Gleichverteilung.) Sei $X \sim \mathrm{Uniform}(a, b)$. Dann gilt $M_X(t) = \frac{\mathrm{e}^{sb} - \mathrm{e}^{sa}}{s(b-a)}$.*

- *(Exponentialverteilung.) Sei* $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$*. Dann gilt* $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - s}$*,* $s < \lambda$*, weil*

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t} \int_0^\infty e^{tx} e^{-\lambda x} dx$$
$$= \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda - t}, & t < \lambda, \\ +\infty, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{19}$$

- *(Gauß'sche Verteilung.) Sei* $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*. Dann gilt*

$$M_X = \exp(\mu t + \sigma^2 t^2 / 2). \tag{20}$$

Diese Formel folgt aus (16) *und den Rechenregeln (Theorem 0.5).*

Beweis vom ZGS

Wir werden den Beweis unter einer zusätzlichen Annahme führen.

Zusätzliche Annahme. Sei $\mathbb{E}[e^{t_0|X|}] < \infty$ für irgendein $t_0 > 0$. Dann gilt $M_X(t) < \infty$ für alle $|t| < t_0$. Diese Annahme ist viel stärker als nur die Existenz vom zweiten Moment, die eigentlich für den ZGS genügt.

Beweis vom ZGS. Sei $Y_i := X_i - \mu$. Dann gilt $\mathbb{E}[Y_i] = 0$ und $\mathrm{Var}[Y_i] = \sigma^2$. Sei M_{Y_1} die momenterzeugende Funktion von Y_1. Wir machen eine Taylor-Entwicklung von $M_{Y_1}(t)$ um $t = 0$:[5]

$$M_{Y_1}(t) = M_{Y_1}(0) + t M'_{Y_1}(0) + \frac{t^2}{2} M''_{Y_1}(0) + o(t^2)$$
$$= 1 + t \underbrace{\mathbb{E}[Y_1]}_{=0} + \frac{t^2}{2} \underbrace{\mathrm{Var}[Y_1]}_{=\sigma^2} + o(t^2) \tag{21}$$
$$= 1 + \frac{t^2}{2}\sigma^2 + o(t^2).$$

[5] Hier und weiterhin benutzen wir die "O"-Notation (auch Landau-Notation genannt): Für zwei reelwertingen Folgen $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ und $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ schreiben wir $\alpha_n \underset{n\to\infty}{=} o(\beta_n)$, falls $\alpha_n = c_n \beta_n$, wobei $c_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Analog schreiben wir $\alpha_n \underset{n\to\infty}{=} O(\beta_n)$, falls $\alpha_n = c_n \beta_n$, wobei c_n eine beschrankte Folge ist.

Sei $Z_n := (S_n - \mu n)/(\sigma\sqrt{n})$. Dann gilt

$$M_{Z_n}(t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{t(S_n - \mu n)}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^n \exp\left(\frac{t(X_k - \mu)}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]$$
$$= [\text{Unabhängigkeit}] = M_{Y_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n \tag{22}$$
$$= [(21)] = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + o(t^2)\right)^n$$
$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Die letzte Zeile in (22) ist die momenterzeugende Funktion von $\mathcal{N}(0,1)$, s. (16). Somit folgt aus dem Stetigkeitssatz (Theorem 0.8)

$$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{D}} Z_\infty, \tag{23}$$

wobei $Z_\infty \sim \mathcal{N}(0,1)$. □

Exponentiell kleine Wahrscheinlichkeiten

Momenterzeugende Funktionen spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der großen Abweichungen. In dieser Theorie studiert man quantitative Verfeinerungen vom GGZ.

Als Beispiel betrachten wir die Abweichungen einer einfachen Irrfahrt von der Ursprung.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{24}$$

wobei X_i sind u.i.v. Schritte von unserer Zufallswanderer. Wir nehmen an, dass

$$\mathbb{P}\{X_1 = 1\} = \mathbb{P}\{X_1 = -1\} = \frac{1}{2}. \tag{25}$$

Die Tschebyscheff-Ungleichung liefert

$$\mathbb{P}\{|\bar{X}_n| > x\} = \mathbb{P}\{|S_n| > nx\} \leq \frac{\mathrm{Var}[S_n]}{(nx)^2} = \frac{1}{nx^2}. \tag{26}$$

IN WORTEN heißt (26), dass die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung der Irrfahrt von der Ursprung nach n Schritten für mehr als nx fällt mindestens umgekehrt proportional mit n (und x^2) ab. Ist diese Abschätzung scharf? Fällt womöglich die Wahrscheinlichkeit einer *großen Abweichung* in der linken Seite von (26) in Wirklichkeit schneller als die rechte Seite?

FRAGE. Ist die Tschebyscheff-Ungleichung (26) scharf?

DIE TSCHEBYSCHEFF-UNGLEICHUNG benutzt nur das zweite Moment. Nun versuchen wir eine Abschätzung für die linke Seite von (26) mit Hilfe der momenterzeugenden Funktion zu erhalten. Es gilt

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX_1}] = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}) = \cosh t \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right). \tag{27}$$

Für $t > 0$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{S_n > nx\} &= \mathbb{P}\{\exp(tS_n) \geq \exp(tnx)\} \\ &\leq [\text{Markov-Ungleichung}] \leq \frac{\mathbb{E}[\exp(tS_n)]}{\exp(tnx)} \\ &= [\text{Unabh.}] = \left(\frac{\mathbb{E}[\exp(tX_1)]}{\exp(tx)}\right)^n \leq \exp(n(t^2/2 - tx)).\end{aligned} \tag{28}$$

Nun können wir das beste t in (28) auswählen[6]:

$$\operatorname*{argmin}_{t\in\mathbb{R}}(t^2/2 - tx) = x \tag{29}$$

[6] Notation $\operatorname{argmin}_x F(x)$ heißt der Minimierer von $F(x)$. Also gilt $\operatorname{argmin}_x F(x) = x^*$, wobei $\min F(x) = F(x^*)$.

Demzufolge

$$\mathbb{P}\{S_n > nx\} \leq \exp\left(-nx^2/2\right). \tag{30}$$

Da X_1 symmetrisch ist, gilt

$$\mathbb{P}\{S_n < -nx\} \leq \exp\left(-nx^2/2\right). \tag{31}$$

Zusammenfassend gilt

$$\mathbb{P}\{|\bar{X}_n| > x\} \leq 2\exp\left(-nx^2/2\right). \tag{32}$$

Verglichen mit (26) ist die Abschätzung (32) viel schärfer: die Abweichungswahrscheinlichkeit fällt mindestens exponentiell für $n \to \infty$ und/oder $x \to \infty$ ab.

Charakteristische Funktionen

Ein Nachteil von den momenterzeugenden Funktionen ist, dass diese den Wert $+\infty$ annehmen können. Um dieses Problem umzugehen benutzt man die **charakteristische Funktionen**.[7]

Abbildung 2: Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) französischer Mathematiker und Physiker.

[7] Alternativ nennt man χ_X die **Fourier-Transformierte** von X.

Definition 0.5 (Charakteristische Funktion)**.** *Sei X eine ZV. Wir sagen, dass*

$$\chi_X(t) := \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}[\cos(tX)] + i\mathbb{E}[\sin(tX)] \tag{33}$$

eine charakteristische Funktion von X ist, wobei $i = \sqrt{-1}$.

BEMERKUNG. Da $|e^{itX}| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$, ist der Erwartungswert in (33) immer endlich und $|\chi_X(t)| \leq 1$ für $t \in \mathbb{R}$.

Theorem 0.10 (Zusammenhang der momenterzeugenden und charakteristischen Funktionen)**.** *Sei M_X die momenterzeugende Funktion einer ZV X mit $M_X(t) < \infty$ für $|t| < t_0$ für irgendein $t_0 > 0$. Dann kann man die charakteristische Funktion von X folgendermaßen berechnen:*

$$\chi_X(t) = M_X(it), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{34}$$

BEMERKUNG. Man kann zeigen, dass ähnliche Rechenregeln (Theorem 0.5) und Stetigkeits- und Umkehrsätze (Theorem 0.8, 0.7) auch für die charakteristische Funktion gelten.

Theorem 0.11 (Umkehrformel/Eindeutigkeitssatz)**.** *Sei X eine stetige ZV mit der Dichte $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\chi_X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion von X. Dann gilt*

(a) *(Fourier-Transformation)* $\chi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx$.

(b) *(Inverse Fourier-Transformation)* $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} \chi_X(t) dt$.

Verteilung der Summe Unabhängigen ZV: Faltung

Seien X und Y zwei unabhängige ZV jeweils mit Verteilungsfunktion F_X und F_Y.

FRAGE. Was ist die Verteilung von $Z = X + Y$?

Theorem 0.12 (Dichte für die Summe von unabhängigen stetigen ZVen)**.** *Sei X und Y zwei unabhängige ZV jeweils mit der Dichte f_X und f_Y. Sei $Z = X + Y$ und sei f_Z die Dichte von Z. Dann gilt*

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx. \tag{35}$$

Beweis. Sei $f_{X,Z}$ die gemeinsame Dichte von ZVen X und Z. Es gilt

$$\begin{aligned} f_{X,Z}(x,z) &= [\text{Bayes'sche Formel}] = f_X(x) f_{Z|X}(z|x) \\ &= f_X(x) f_Y(z-x). \end{aligned} \tag{36}$$

Demzufolge gilt

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Z}(x,z) dx. \tag{37}$$

□

Definition 0.6 (Faltung)**.** *Die Dichte f_Z aus* (35) *heißt die **Faltung** von f_X und f_Y.*

BEMERKUNG. Offensichtlich gilt

$$f_X * f_Y = f_Y * f_X. \tag{38}$$

Somit kann man die Faltung als eine *symmetrische und assoziative Operation* auf der Menge aller Dichten betrachtet werden.

BEMERKUNG. Das explizite Ausrechnen von $f_X * f_Y$ kann kompliziert sein. Die Laplace- und Fourier-Transformationen bilden die Faltungsoperation $*$ in die gewöhnliche **Multiplikation von Zahlen** ab. Diese Tatsache haben wir auch im Beweis vom ZGS ausgenutzt!

Stabile Verteilungen

Wir haben gesehen, dass die Normalverteilung und die Poisson-Verteilung stabil[8] sind (s. Theorem 0.9). Beide genannte Verteilungen tauchen als Summen von u.i.v. ZVen im Grenzwert von vielen Summanden auf.

[8] D.h. die Summe von zwei unabhängigen zentrierten Kopien der Verteilung hat (bis auf eine Reskalierung) die gleiche Verteilung wie die Summanden.

FRAGE. Welche Verteilungen können als der Grenzwert einer Summe von n u.i.v. ZVen als $n \to \infty$ auftauchen?

ANTWORT. Sei $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine Folge von u.i.v. ZVen. Wir wählen $p \in [0,1]$ und setzen $q = 1 - p$. Dann gilt $n = pn + qn$. Zusätzlich gilt[9]

$$\lfloor pn \rfloor \underset{n\to\infty}{\sim} pn. \tag{40}$$

[9] Hier benuzten wir die Notation $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\sim} \beta_n$, wenn es eine Folge $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $c_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ existiert, so dass

$$\alpha_n = c_n \beta_n. \tag{39}$$

Demzufolge gilt

$$S_n \underset{n\to\infty}{\sim} S_{\lfloor pn \rfloor} + S'_{\lfloor qn \rfloor}, \tag{41}$$

wobei $S_{\lfloor pn \rfloor} := \sum_{k=1}^{\lfloor pn \rfloor} X_k$ und $S'_{\lfloor qn \rfloor} = \sum_{k=1}^{\lfloor qn \rfloor} X'_k$, wobei $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{X'_k\}_{k=1}^{\infty}$ u.i.v. ZVen sind. Wir definieren die reskalierte Summen

$$\begin{aligned} Z_n &= \frac{1}{n^\gamma} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mathbb{E}[X_k]), \quad n \in \mathbb{N}, \\ Z'_n &= \frac{1}{n^\gamma} \sum_{k=1}^{n} (X'_k - \mathbb{E}[X'_k]), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{42}$$

Dann gilt für $\gamma \geq 0$

$$\begin{aligned} Z_n &\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^\gamma} \left(S_{\lfloor pn \rfloor} - np\mathbb{E}[X_1] + S'_{\lfloor qn \rfloor} - nq\mathbb{E}[X'_1] \right) \\ &= \frac{1}{n^\gamma} \left(\lfloor pn \rfloor^\gamma \underbrace{\frac{1}{\lfloor pn \rfloor^\gamma} \left(S_{\lfloor pn \rfloor} - np\mathbb{E}[X_1] \right)}_{=Z_{\lfloor pn \rfloor}} + \lfloor qn \rfloor^\gamma \underbrace{\frac{1}{\lfloor qn \rfloor^\gamma} \left(S'_{\lfloor qn \rfloor} - nq\mathbb{E}[X_1] \right)}_{=Z'_{\lfloor qn \rfloor}} \right) \\ &= p^\gamma Z_{\lfloor pn \rfloor} + q^\gamma Z'_{\lfloor qn \rfloor}. \end{aligned} \tag{43}$$

Wenn Z_n in Verteilung gegen eine ZV Z_∞ konvergiert, dann konvergieren die ZVen $Z_{\lfloor pn \rfloor}$ und $Z'_{\lfloor qn \rfloor}$ auch (als Unterfolgen) gegen Z_∞ in Verteilung. Somit folgt aus (43), dass die Grenzwertverteilung Z_∞ die Eigenschaft haben muss, dass[10]

[10] Hier bedeutet die Notation $X \sim Y$, dass X und Y die gleiche Verteilung haben.

$$Z_\infty \sim p^\gamma Z_\infty + (1-p)^\gamma Z'_\infty, \tag{44}$$

wobei Z'_∞ ist Unabhängig von Z_∞ und $Z_\infty \sim Z'_\infty$.

Definition 0.7 (Stabile Verteilung)**.** *Verteilung von ZV Z heißt **stabil** (in engerem Sinne), falls* (44) *für irgendein* $\gamma \geq 0$ *und alle* $p \in [0,1]$ *erfüllt ist.*

Somit haben wir gezeigt, dass nur die *stabile Verteilungen* als der Grenzwert von Summen der u.i.v. ZVen auftauchen können.

Example 0.7 (Normalverteilung)**.** *Ein Spezialfall von einem stabilen Grenzwert haben wir im ZGS beobachtet. Im Fall von* $\mathrm{Var}[X_1] < \infty$ *muss die Normierungspotenz* $\gamma = 1/2$ *sein. Die entsprechend reskalierte Summe* S_n *konvergiert gegen die Standard-Normalverteilung* $\mathcal{N}(0,1)$*. Diese ist stabil im Sinne von* (44) *mit* $\gamma = 1/2$*.*

Falls die Varianz von Summanden X_i unendlich ist[11], muss die Potenz $\gamma \neq 1/2$ gewählt werden. Die genaue Wahl von γ hängt davon ab, wie schnell die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}\{X_1 > x\}$ für großes x gegen 0 konvergiert und ist somit verteilungsabhängig.

[11] Dies ist z.B. der Fall für die Summanden X_i mit der Pareto-Verteilung für $\alpha \leq 2$.

Zusammenhang zwischen den Konvergenzbegriffen

$$\boxed{\xrightarrow{\text{f.s.}}} \Rightarrow \boxed{\xrightarrow{\mathbb{P}}} \Rightarrow \boxed{\xrightarrow{\mathrm{D}}} \tag{45}$$

Bemerkung. Die Umkehrimplikationen gelten im Allgemeinen nicht!

In den nachfolgenden Theoremen werden wir die Implikationen (45) beweisen.

Theorem 0.13 ($\boxed{\xrightarrow{\text{f.s.}}} \Rightarrow \boxed{\xrightarrow{\mathbb{P}}}$)**.** *Sei* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *eine Folge von ZVen mit* $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.}} X_\infty$*, wobei* X_∞ *eine ZV ist. Dann gilt* $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X_\infty$*.*

Beweis. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbb{P}\{\exists M = M(\omega,\varepsilon)\colon \forall n > M\colon |X_n - X_\infty| < \varepsilon\} \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_M \bigcap_{n\colon n>M} \{|X_n - X_\infty| < \varepsilon\}\right) \\
&= \lim_{M\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\colon n>M} \{|X_n - X_\infty| < \varepsilon\}\right) \\
&\leq \lim_{M\to\infty} \inf_{n>M} \mathbb{P}\{|X_n - X_\infty| < \varepsilon\} \\
&\leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\{|X_n - X_\infty| < \varepsilon\} \\
&\leq \varlimsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\{|X_n - X_\infty| < \varepsilon\} \\
&\leq 1.
\end{aligned} \tag{46}$$

Demzufolge gilt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{|X_n - X_\infty| < \varepsilon\} = 1$. □

Example 0.8 ($\boxed{\xrightarrow{\mathbb{P}}} \not\Rightarrow \boxed{\xrightarrow{\text{f.s.}}}$)**.** *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *ein WRaum, wobei* $\Omega :=$ $[0,1]$ *und* $\mathbb{P}$ *die Gleichverteilung auf* $[0,1]$ *sind. Wir definieren*

$$X_n(\omega) := \begin{cases} 1, & \omega \in [k2^{-k}, (j+1)2^{-k}] \\ 0, & \textit{sonst}, \end{cases} \tag{47}$$

wobei $n = 2^k + j$ *mit* $k \in \mathbb{Z}_+$ *und* $j \in [0, 2^k - 1] \cap \mathbb{Z}_+$. *Setze* $X_\infty \equiv 0$. *Die Folge* $\{\mathbb{P}\{|X_n - X_\infty| > 0\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ist monoton nicht steigend und* $\mathbb{P}\{|X_{2^k}|\} = 2^{-k}$. *Damit gilt* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{|X_n| > 0\} = 0$. *Demzufolge* $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$. *Allerdings* $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ ***existiert nicht*** *für alle* $\omega \in \Omega$, *da* $\overline{\lim}_{n\to\infty} X_n(\omega) = 1$ *und* $\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0$.

Theorem 0.14 ($\boxed{\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}} \Rightarrow \boxed{\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{D}}}$)**.** *Sei* $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ *eine Folge von ZVen mit* $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X_\infty$ *, wobei* X_∞ *eine ZV ist. Dann gilt* $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{D}} X_\infty$.

Beweis. □

Theorem 0.15 (Rechenregeln für verschiedene Konvergenzarten)**.** *Sei* $\{X_n\}_{n=1}^\infty$, $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ *zwei Folgen von ZVen und* X_∞ *und* Y_∞ *zwei ZVen.*

(a) *Ist* $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X_\infty$ *und* $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} Y_\infty$, *so gilt* $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X_\infty + Y_\infty$ *und* $X_n Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X_\infty Y_\infty$.

(b) *Aussage* (a) *gilt auch wenn wir darin* $\boxed{\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}}$ *durch* $\boxed{\xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.}}}$ *ersetzen.*

(c) *Im Allgemeinen gilt Aussage* (a) ***nicht***, *wenn wir darin* $\boxed{\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}}$ *durch* $\boxed{\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{D}}}$ *ersetzen. Sehe allerdings* (d).

(d) **[Satz von Slutsky]** *Ist* $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{D}} X_\infty$ *und* $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} Y_\infty \equiv c$, *wobei* c *eine Konstante ist, so gilt* $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{D}} X_\infty + Y_\infty$ *und* $X_n Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{D}} X_\infty Y_\infty$.

(e) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{D}} X_\infty \equiv c$, *wobei* c *eine Konstante ist genau dann, wenn* $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X_\infty \equiv c$.

Literatur