Übungsblatt 0

Einige wichtige Bausteine aus der W-Theorie I

W-Theorie II @ Universität Duisburg-Essen
Dozent: Prof. Dr. Martin Hutzenthaler
Winter Semester 2014/15

Übungen: Dr. Anton Klimovsky

Dies ist eine Wiederholung von einigen wichtigen Bausteinen aus der Vorlesung "W-Theorie I". Diese Bausteine werden verstärkt in der Vorlesung "W-Theorie II" gebraucht werden. Sie können diese Konzepte im Kapiteln 6–8 vom Buch

A. Klenke, Wahrscheinlichkeitstherie, Springer 2006

nachschlagen.

Konvergenzsätze

In diesem Abschnitt ist μ ein Maß auf einem messbaren Raum $(S, \mathcal{S})$.

Satz 1 (Monotoner Konvergenzsatz auch Satz von Beppo Levi). *Sei $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge nichtnegativer, messbarer reelwertiger Funktionen $f_n\colon S \to \mathbb{R}$ mit $f_n \uparrow f$ μ-f.ü. als $n \to \infty$, wobei $f\colon S \to \mathbb{R}_+$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu. \tag{1}$$

Satz 2 (Lemma von Fatou). *Sei $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge nichtnegativer, messbarer reelwertiger Funktionen $f_n\colon S \to \mathbb{R}_+$. Dann gilt*

$$\int \varliminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

Vertauschung von Limes und Lebesgue-Integral:

Satz 3 (Satz von Lebesgue auch Satz von der majorisierten Konvergenz). *Sei $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge, messbarer reelwertiger Funktionen $f_n\colon S \to \mathbb{R}$. Es existiere eine nicht negative Funktion $g \in L_1(S, \mathcal{S}, \mu)$ mit $|f_n(x)| \leq g(x)$ für μ-fast alle $x \in S$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Es existiere die Grenzwertfunktion $f_\infty(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für μ-fast alle $x \in S$. Dann gilt f_∞ ist integrierbar und*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f_\infty \mathrm{d}\mu. \tag{3}$$

Bemerkung 4. *Im Kontext von* Satz 3 *heißt die Funktion g die **integrierbare Majorante** für die Folge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Bedingte Erwartung

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum.

Definition 5 (Bedingte Erwartung bzgl. eines Ereignisses). *Sei $B \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Für eine ZV X heißt*

$$\mathbb{E}[X \mid B] := \frac{\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_B]}{\mathbb{P}[B]} \tag{4}$$

*der **bedingte Erwartungswert** von X gegeben B.*

Insbesondere ist

$$\mathbb{E}[X \mid B] = \int X \frac{\mathbb{1}_B}{\mathbb{P}(B)} \mathrm{d}\mathbb{P} = \int X \mathrm{d}\mathbb{P}(\cdot \mid B). \tag{5}$$

Also der bedingte Erwartungswert ist der Erwartungswert bzgl. der bedingten Wahrscheinlichkeit.

Interpretation von (4)**:** $\mathbb{E}[X \mid B]$ ist die *verbesserte Prognose* (im Vergleich zu $\mathbb{E}[X]$) für den Wert von X, gegeben die Info, dass das Ereignis B eintritt.

Definition 6 (Bedingte Erwartung bzgl. einer abzählbar-erzeugten σ-Algebra)**.** *Sei $B_1, B_2, \ldots$ eine (höchstens Abzählbare) Zerlegung von Ω in o.B.d.A. disjunkte Mengen $B_i \in \mathcal{F}$, wobei $\mathbb{P}[B_i] > 0$. Sei $\mathcal{G} = \sigma(B_1, B_2, \ldots) \subset \mathcal{F}$. Die ZV*

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}](\omega) := \sum_i \mathbb{E}[X \mid B_i] \mathbb{1}_{B_i}(\omega) \tag{6}$$

*heißt **bedingte Erwartung** von X gegeben $\mathcal{G}$.*

Interpretation von (6)**:** Gemäß dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ wird ein $\omega \in \Omega$ ausgelost. Wir erfahren ω nicht. Es wird uns nur mitgeteilt, in welchem der B_i ω liegt. Daraufhin sollen wir eine Prognose für $X(\omega)$ abgeben. Offenbar ist es vernünftig, als Prognose den Wert $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}](\omega)$ abzugeben, da dies der $\mathbb{P}$-Mittelwert über $\bar{\omega}$ ist, die nach der Information "$\omega \in B_i$" noch in Frage kommen.

Beispiel 7. $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\} \Rightarrow \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}](\omega) = \mathbb{E}[X] \equiv \text{const}.$

Satz 8 (Eigenschaften)**.** *Mit den Voraussetzungen von* Definition 6 *gilt:*

(a) $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ *ist eine $\mathcal{G}$-messbare ZV auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

(b) $\int \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}](\omega) \cdot \mathbb{1}_B(\omega) \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int X(\omega) \cdot \mathbb{1}_B(\omega) \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega), \quad$ *für alle $B \in \mathcal{G}$.*

Oft interessiert man sich für bedingte Erwartungen bezüglich einer Teil-σ-Algebra $\mathcal{G}$ von $\mathcal{F}$, die nicht durch eine (abzählbare) Partition erzeugt wird (sondern z.B. von einer ZV mit Dichte). Dies führt insbesondere zur Frage: Was tun, wenn in (6) $\mathbb{P}(B_i) = 0$? Ein Ausweg ist die folgende Definition, die "$\frac{0}{0}$"-Undefiniertheiten umgeht und basiert sich auf den Eigenschaften von Satz 8.

Definition 9 (Allgemeine bedingte Erwartung)**.** *Sei $X \geq 0$ messbar, ZV $X_0 \geq 0$ heißt **(eine Version der) bedingten Erwartung von** X **bezüglich (oder gegeben)** $\mathcal{G}$, falls X_0 die folgenden zwei Eigenschaften erfüllt*

(a) X_0 *ist $\mathcal{G}$-messbar.*

(b) $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X_0 \cdot Y]$ *für alle $\mathcal{G}$-messbaren Funktionen $Y \geq 0$.*

In diesem Fall schreiben wir $X_0 =: \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$.

Sei nun X nicht unbedingt nicht negativ, sondern lediglich mit $\mathbb{E}[X]$ wohldefiniert (d.h. zu mindestens eine von den Zahlen $\mathbb{E}[X_+]$, $\mathbb{E}[X_-]$ endlich ist). In diesem Fall definieren wir

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] := \mathbb{E}[X_+ \mid \mathcal{G}] - \mathbb{E}[X_- \mid \mathcal{G}]. \tag{7}$$

Bemerkung 10. Definition 9 *verallgemeinert* Definitionen 6 und 5.

Satz 11 (Existenz)**.** *Unter Voraussetzungen von* Definition 9 *existiert eine (Version der) bedingten Erwartung.*

Bemerkung 12. *Wie der Name "Version" schon suggeriert, ist die bedingte Erwartung nicht eindeutig (es existieren oft verschiedene ZVen, die die Bedingungen der* Definition 9 *erfüllen).*

Notation: Sei X und Y zwei ZVen. $\mathbb{E}[X \mid Y] := \mathbb{E}[X \mid \sigma(Y)]$.

Beispiel: Es sei X und Y zwei ZV mit jeweils Werten in $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$. Sei die gemeinsame Verteilung von X und Y absolut stetig bzgl. Lebesgue-Maß und zwar mit der Dichte $p(x, y)$. D.h., für alle Borel-messbare Funktionen $f\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ gilt

$$\mathbb{E}[f(X, Y)] = \int f(x, y) p(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y. \tag{8}$$

Die marginale Dichte von Y ist dann

$$q(y) := \int p(x, y) \mathrm{d}x. \tag{9}$$

Proposition 13 (Bedingte Erwartung im absolut stetigen Fall). *Mit Notationen* (8) *und* (9) *definiere für alle $y \in \mathbb{R}^n$ ein Maß $\nu(y, \mathrm{d}x)$ auf $\mathbb{R}^m$ durch*

$$\nu(y, \mathrm{d}x) := \begin{cases} \frac{p(x,y)}{q(y)}\mathrm{d}x, & q(y) > 0, \\ \delta_0(\mathrm{d}x), & q(y) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Dann gilt für alle messbare Funktionen $h\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$

$$\mathbb{E}[h(X) \mid Y](\omega) = \int h(x)\nu(Y(\omega), \mathrm{d}x). \tag{11}$$

Definition 14 (bedingte Dichte). *Im Kontext von* Proposition 13 *heißt die Funktion $\frac{p(x,y)}{q(y)}$ die* ***bedingte Dichte*** *von X gegeben Y.*

Bemerkung 15. *Die bedingte Dichte erinnert stark an die elementare Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit.*

Satz 16 (Eigenschaften der allgemeinen bedingten Erwartung). *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum; $L^p = L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$; $\mathcal{G}, \mathcal{D}$ Teil-σ-Algebren von $\mathcal{F}$; $X, Y \in L^1$. Dann gelten die folgenden Eigenschaften f.s.*

(a) $\mathbb{E}[X \mid \{\Omega, \varnothing\}] = \mathbb{E}[X]$.

(b) **[Totaler Erwartungswert]** $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$.

(c) *Falls X $\mathcal{G}$-messbar ist, so gilt $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = X$.*

(d) **[Linearität]** $\mathbb{E}[c \cdot X + d \cdot Y \mid \mathcal{G}] = c \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] + d \cdot \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$ *für alle Konstanten c, d.*

(e) **[Monotonie]** *Falls $X \le Y$ f.s., so gilt $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \le \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$.*

(f) **[Glättung auch Turmeigenschaft]** *Falls $\mathcal{D} \subset \mathcal{G}$, so gilt $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \mid \mathcal{D}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{D}]$.*

(g) **[Bedingte Jensen'sche Ungleichung]** *Sei $\psi\colon J \to \mathbb{R}$ eine Konvexe Funktion auf einem Interval J, so dass ψ endliche rechte- (oder linke-) Ableitungen bei den linken (oder rechten) Endpunkten vom J hat, falls J nicht offen ist. Falls $X \in J$ f.s. und falls $\psi(X) \in L_1$, so gilt*

$$\psi(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]) \le \mathbb{E}[\psi[X] \mid \mathcal{G}]. \tag{12}$$

(h) **[Kontraktion]** *Für $X \in L^p$, $p \ge 1$, $\|\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]\|_p \le \|X\|_p$ für $p \ge 1$.*

(i) **[Konvergenzen für $n \to \infty$]**

(i1) **[Stetigkeit]** *Falls $X_n \to X$ in L^p, so gilt $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}] \to \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ in L^p.*

(i2) **[Bedingte monotone Konvergenz]** *Falls $0 \le X_n \uparrow X$ f.s., $X_n, X \in L^1$ für $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] \uparrow \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ f.s. und $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}] \to \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ in L_1.*

(i3) **[Bedingte majorisierte Konvergenz]** *Falls $X_n \to X$ f.s. und $|X_n| \le Y \in L^1$ ist, so gilt $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}] \to \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ f.s.*

(j) *Falls $XY \in L^1$ und X $\mathcal{G}$-messbar ist, so gilt $\mathbb{E}[X \cdot Y \mid \mathcal{G}] = X \cdot \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$.*

(k) *Falls $\sigma(X)$ und $\mathcal{G}$ unabhängig sind, so gilt $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.*

(l) **[Substitution]** *Seien U und V jeweils $(S_1, \mathcal{S}_1)$- und $(S_2, \mathcal{S}_2)$-wertige ZVen. Es sei ψ eine messbare reele Funktion auf $(S_1 \times S_2, \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2)$. Falls U $\mathcal{G}$-messbar, $\sigma(V)$ und $\mathcal{G}$ unabhängig und $\mathbb{E}[|\psi(U, V)|] < \infty$ sind, so gilt*

$$\mathbb{E}[\psi(U, V) \mid \mathcal{G}] = h(U), \tag{13}$$

wobei $h(u) := \mathbb{E}[\psi(u, V)]$.