Übungsblatt 1

Filtrationen und Stoppzeiten

Abgabe am 21.10.2014

W-Theorie II @ Universität Duisburg-Essen

Dozent: Prof. Dr. Martin Hutzenthaler

Winter Semester 2014/15

Übungen: Dr. Anton Klimovsky

Aufgabe 1.1 Filtrationen, 4 Punkte

Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von u.i.v. Münzwürfen und $(\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ die von den Münzwürfen *erzeugte Filtration*. Für jedes von den folgenden Ereignissen geben Sie *das kleinste* $n \in \mathbb{N}$ (falls dieses existiert) an, so dass das Ereignis zur σ-Algebra $\mathcal{F}_n$ gehört:

- $A := \{$das erste Auftreten von Kopf folgt nach nicht mehr als 10 aufgetretenen Zahlen$\}$,
- $B := \{$es kommt mindestens ein Kopf in der gesamten Folge von den Münzwürfen vor$\}$,
- $C := \{$die ersten 100 Münzwürfen geben das gleiche Ergebnis$\}$,
- $D := \{$es gibt nicht mehr als zwei Köpfe *und* zwei Zahlen in den ersten fünf Münzwürfen$\}$.

Aufgabe 1.2 Stoppzeiten, 4 Punkte

Sei τ eine ZV mit Werten in $\mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$. Sei $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration. Zeigen Sie, dass die folgenden zwei Eigenschaften äquivalent sind

(a) $\{\tau \le i\} \in \mathcal{F}_i$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

(b) $\{\tau = i\} \in \mathcal{F}_i$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 1.3 Eintrittszeit, 4 Punkte

Sei $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ ein reelwertiger adaptierter stochastischer Prozess. Sei $B \subset \mathbb{R}$ eine Borel-Menge. Zeigen Sie, dass die erste *Eintrittszeit* in B, d.h.

$$\tau := \min\{i \in \mathbb{N}_0 \colon X_i \in B\}, \tag{1}$$

eine Stoppzeit mit Werten in $\mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ ist, wobei $\tau = +\infty$, falls für alle $i \in \mathbb{N}_0$: $X_i \notin B$.

Aufgabe 1.4 Gestoppter stochastischer Prozess, 4 Punkte

Sei $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration und τ eine Stoppzeit mit Werten in $\mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$. Zeigen Sie die folgende Aussage: falls $(X_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ ein adaptierter Prozess ist, so ist der *gestoppte Prozess* $(X_{i\wedge\tau})_{i\in\mathbb{N}_0}$ auch adaptiert.