Übungsblatt 2

Martingale

Abgabe am 28.10.2014

W-Theorie II @ Universität Duisburg-Essen

Dozent: Prof. Dr. Martin Hutzenthaler

Winter Semester 2014/15

Übungen: Dr. Anton Klimovsky

Aufgabe 2.1 3 Punkte

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reelwertiger ZVen mit $\mathbb{E}[X_n] = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ noch eine Folge reelwertiger ZVen mit der Eigenschaft, dass die σ-Algebren $\sigma(X_{n+1})$ und $\sigma(X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ unabhängig sind. Man zeige: falls $\mathbb{E}[|X_k Y_k|] < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist, so ist die Folge

$$Z_n := \sum_{k=1}^{n} X_k Y_k, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

ein Martingal.

Hinweis: verwenden Sie die Rechenregeln für die bedingte Erwartung.

Aufgabe 2.2 Orthogonalität von den Martingalzuwächsen, 3 Punkte

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reelwertiger ZVen mit $X_n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Definiere $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$ und $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Zeigen Sie, dass falls $(S_n)_n$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)$ ist, so gilt $\mathbb{E}[X_i \cdot X_j] = 0$ für alle $i \neq j \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.3 Likelihood-Quotient, 4 Punkte

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen von ZVen, so dass die gemeinsame Dichte von $\{X_i\}_{i=1}^n$ durch $f_n\colon \mathbb{R}^n \to (0, +\infty)$ gegeben ist und die gemeinsame Dichte von $\{Y_i\}_{i=1}^n$ durch $g_n\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ gegeben ist, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$Z_n := \frac{g_n(X_1, \dots, X_n)}{f_n(X_1, \dots, X_n)}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

ein Martingal bzgl. $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}} := \sigma(X)$ ist.

Hinweis: verwenden Sie die Definition der bedingten Erwartung. Insb. genügt es z.Z., dass

$$\int_B Z_{n+1}(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = \int_B Z_n(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega), \quad B \in \mathcal{F}_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Aufgabe 2.4 Azuma-Hoeffding'sche Ungleichung, 4 Punkte

Man zeige:

(a) Ist X eine ZV mit $|X| \leq 1$ f.s., so gibt es eine ZV Y mit Werten in $\{-1, +1\}$ und mit $\mathbb{E}[Y \mid X] = X$.

(b) Für X wie in (a) mit $\mathbb{E}[X] = 0$ folgere (mit Hilfe der bedingten Jensen'schen Ungleichung)

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda X}] \leq \cosh \lambda \leq \mathrm{e}^{\lambda^2/2}, \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

(c) Ist $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal mit $M_0 = 0$ und gibt es eine Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nichtnegativer Zahlen mit $|M_n - M_{n-1}| < c_n$ f.s. für jedes $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda M_n}] \le \exp\left(\frac{1}{2}\lambda^2 \sum_{k=1}^{n} c_k^2\right). \tag{5}$$

(d) Unter den Bedingungen von (c) gilt die Azuma-Hoeffding'sche Ungleichung:

$$\mathbb{P}\{|M_n| \ge x\} \le 2\exp\left(-\frac{x^2}{2\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right), \quad \text{für alle } x > 0. \tag{6}$$

Hinweis: verwenden Sie bei (d) die Markov'sche Ungleichung für $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ (vergl. (c)) und anschließend wähle das $\lambda \in \mathbb{R}$ optimal.