Übungsblatt 3
Optional-Sampling-Satz

Abgabe am 04.11.2014

W-Theorie II @ Universität Duisburg-Essen

Dozent: Prof. Dr. Martin Hutzenthaler

Winter Semester 2014/15

Übungen: Dr. Anton Klimovsky

Aufgabe 3.1 Erwartung der Zeit, zu der die einfache nicht symmetrische Irrfahrt einen gegebenen Zustand erstmals erreicht, 4 Punkte

Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die einfache Irrfahrt (= die Nächste-Nachbar-Irrfahrt) auf $\mathbb{Z}$ mit Wahrscheinlichkeit $p := 4/5$ für einen Schritt nach rechts (oder z.B. nach oben, je nach dem, wie man sich das $\mathbb{Z}$ visualisiert). Sei $X_0 = 0$.

(a) Für welche $v \in \mathbb{R}$ ist $(Y_n := X_n - vn)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal?

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zeit τ (mit Werten in $\mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$), zu der die Irrfahrt X erstmals den Zustand 100 erreicht. Falls $X_n \neq 100$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so ist $\tau = +\infty$.

Hinweis: Bei (b) benutzen Sie den Optional-Sampling-Satz. Achtung: τ ist unbeschränkt. Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass $\mathbb{E}[Y_n \cdot \mathbb{1}_{\tau>n}] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $\mathbb{E}[|Y_\tau|] < \infty$. Unter diesen Annahmen ist der Optional-Sampling-Satz anwendbar.

Aufgabe 3.2 Symmetrische einfache Irrfahrt zum Quadrat, 0 Punkte

Achtung: Wegen der bekannten Lösung ist diese Aufgabe ersetzt worden durch die Aufgabe 3.5.

Aufgabe 3.3 Erwartung der Eintrittszeit einer einfachen symmetrischen Irrfahrt, 0 Punkte

Achtung: Wegen der bekannten Lösung ist diese Aufgabe ersetzt worden durch die Aufgabe 3.5.

Aufgabe 3.4 Funktional einer Irrfahrt, 4 Punkte

Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine symmetrische einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$. D.h. $S_0 := 0$ und für $n \in \mathbb{N}$: $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, wobei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von u.i.v. ZVen ist mit

$$\mathbb{P}\{X_1 = 1\} = \mathbb{P}\{X_1 = -1\} = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Sei τ die erste Eintrittszeit (mit Werten in $\mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$) der Irrfahrt $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in die Menge $B := \{n \in \mathbb{Z}\colon |n| \geq K\}$, wobei $K \in \mathbb{N}$. Falls $S_n \notin B$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so ist $\tau = +\infty$. Betrachte $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$Z_n := (-1)^n \cos(\pi(S_n + K)). \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass Z ein Martingal ist.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}[(-1)^\tau]$.

Hinweis: Bei (a) transformieren Sie $\mathbb{E}[(-1)^{n+1}\cos(\pi S_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n]$ um $(-1)^n \cos(\pi S_n)$ zu erhalten. Bei (b) benutzen Sie den Optional-Stopping-Satz und die folgende Beobachtung: $Z_\tau = (-1)^\tau$.

Aufgabe 3.5 Wartezeiten auf Mustern bei den Münzwürfen, 8 Punkte

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von u.i.v. Münzwürfen:

$$\mathbb{P}\{X_n = K\} = \mathbb{P}\{X_n = Z\} = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

(Hier steht "K" für Kopf und "Z" für Zahl.) Definiere

$$\tau_{KZK} := \inf\{n \geq 3\colon (X_{n-2}, X_{n-1}, X_n) = (K, Z, K)\}. \tag{4}$$

Falls $(X_{n-2}, X_{n-1}, X_n) \neq (K, Z, K)$ für alle $n \geq 3$, so definiere $\tau_{KZK} := +\infty$.
Unseres Ziel ist $\mathbb{E}[\tau_{KZK}]$ zu berechnen:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ definiere ZV $B_n := \mathbb{1}_{\{X_n = K\}}$. Setze

$$M_n := \sum_{k=1}^{n} (2B_k - 1), \quad n \in \mathbb{N} \tag{5}$$

und $M_0 := 0$. Zeige, dass $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal ist.

(b) Definiere

$$\tau_{101} := \inf\{n \geq 3\colon (B_{n-2}, B_{n-1}, B_n) = (1, 0, 1)\}. \tag{6}$$

Falls $(B_{n-2}, B_{n-1}, B_n) \neq (1, 0, 1)$ für alle $n \geq 3$, so definiere $\tau_{101} := +\infty$. Offensichtlich gilt $\tau_{KZK} \equiv \tau_{101}$. Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ setze

$$A_n^{(m)} := \begin{cases} 1, & n = m; \\ -2, & n = m+1, \quad n < \tau_{101}, \quad X_m = K; \\ 4, & n = m+2, \quad n < \tau_{101}, \quad (X_m, X_{m+1}) = (K, Z); \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{7}$$

Definiere

$$N_n^{(m)} := \sum_{r=1}^{n} A_r^{(m)} (M_r - M_{r-1}). \tag{8}$$

Zeige, dass für alle $m \in \mathbb{N}$: $(N_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal ist.

(c) Zeige, dass $\mathbb{E}[N_{\tau_{101}}^{(m)}] = 0$, $m \in \mathbb{N}$.

(d) Definiere $N := \sum_{m=1}^{\tau_{101}} N_{\tau_{101}}^{(m)}$. Zeige, dass $N = 10 - \tau_{101}$.

Aus (c) und (d) folgt, dass $\mathbb{E}[\tau_{KZK}] = \mathbb{E}[\tau_{101}] = 10$.