Übungsblatt 4
Martingalkonvergenzsätze
Abgabe am 11.11.2014

W-Theorie II @ Universität Duisburg-Essen

Dozent: Prof. Dr. Martin Hutzenthaler

Winter Semester 2014/15

Übungen: Dr. Anton Klimovsky

Aufgabe 4.1 Multiplikatives Model, 5 Punkte

Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge reelwertiger u.i.v. ZVen mit $X_1 \geq 0$, $\mathbb{E}[X_1] = 1$, $\mathbb{P}\{X_1 = 1\} < 1$. Sei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}} := \sigma(X)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Folge

$$M_n := \prod_{i=1}^{n} X_i, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

ein Martingal bzgl. $\mathbb{F}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{P}$-f.s. bei $n \to \infty$ gegen eine ZV M_∞ konvergiert.

(c) Bestimmen Sie den Limes M_∞.

(d) Konvergiert die Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in L^1, wenn $n \to \infty$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4.2 Ableitung einer Lipschitz-Funktion, 6 Punkte

Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine beliebige Lipschitz-Funktion, d.h. es existiert ein $K > 0$, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|, \quad \text{für alle } x, y \in [0,1]. \tag{2}$$

Wir bezeichnen durch $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ die (einfachste) Folge der stückweise linearen Funktionen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, die bei allen Punkten aus $D_n := \{k2^{-n} \colon k \in \{0,1,\ldots,2^n\}\}$ mit f übereinstimmen, d.h.

$$f(x) = f_n(x) \text{ für alle } x \in D_n \text{ und alle } n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion $M_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$M_n(x) := \begin{cases} \frac{\mathrm{d}f_n(x)}{\mathrm{d}x}, & x \in [0,1] \setminus D_n, \\ 0, & x \in D_n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) Die Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast überall (f.ü.) und in $L^1([0,1])$, wenn $n \to \infty$.

Hinweis: Betrachten Sie $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als eine Folge reelwertiger ZVen auf dem W-Raum $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mu)$, wobei μ das Lebesgue-Maß ist. Betrachten Sie die Filtration

$$\mathcal{F}_n := \sigma\left(\{(k2^{-n}, (k+1)2^{-n}) \subset [0,1] \colon k \in \{0,\ldots,2^n-1\}\} \cup 2^{D_n}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Benutzen Sie den Martingalkonvergenzsatz.

(b) Zeigen Sie, dass f das unbestimmte Integral einer beschränkten Funktion ist.

Aufgabe 4.3 Ein Gegenbeispiel zur Martingalkonvergenzsatz, 5 Punkte

Sei $Z_0 := 0$ und $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger ZVen mit

$$\mathbb{P}\{Z_n = 1\} = \mathbb{P}\{Z_n = -1\} = \frac{1}{2n} \text{ und } \mathbb{P}\{Z_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Wir definieren $X_0 := 0$ und weiter rekursiv

$$X_n := Z_n \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=0\}} + nX_{n-1}|Z_n|\mathbb{1}_{\{X_{n-1}\neq 0\}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Wir setzen $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0} := \sigma(Z)$.
Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal bzgl. $\mathbb{F}$.

(b) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$.
Hinweis: Benutzen Sie die Definition der stochastischen Konvergenz.

(c) Die Folge $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ ist nicht f.s. konvergent.
Hinweis: Benutzen Sie das Lemma von Borel-Cantelli für die Folge der Ereignissen $(\{|Z_n| = 1\})_{n\in\mathbb{N}}$ um zu zeigen, dass $\mathbb{P}\{Z_n \neq 0 \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\} = 1$. Was bedeutet dies für die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$?