Übungsblatt 6

Rückwärtsmartingale und Austauschbarkeit

Abgabe am 25.11.2014

W-Theorie II @ Universität Duisburg-Essen

Dozent: Prof. Dr. Martin Hutzenthaler

Winter Semester 2014/15

Übungen: Dr. Anton Klimovsky

Aufgabe 6.1 Darstellung der symmetrischen Funktionen, 4 Punkte

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $(E, \mathcal{E})$ ein messbarer Raum. Zeigen Sie, dass sich jede symmetrische Funktion $f\colon E^n \to \mathbb{R}$ als $f(x) = g(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i})$ schreiben lässt, wobei $g\colon \mathcal{M}_1(E) \to \mathbb{R}$ (abhängig von f) geeignet zu wählen ist und δ_x das *Dirac-Maß* ist. D.h. für $x \in E$ und $A \in \mathcal{E}$ gilt $\delta_x(A) := \mathbb{1}_A(x)$.

Aufgabe 6.2 Kovarianzstruktur der endlichen austauschbaren Familien, 4 Punkte

Seien $X_1, \ldots, X_n$ austauschbare reelwertige ZVen mit $X_i \in L^2$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $n \geq 2$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt

$$\mathrm{Cov}[X_1, X_2] \geq -\frac{1}{n-1}\mathrm{Var}[X_1]. \tag{1}$$

(b) Es gibt für $n \geq 2$ ein (nichttriviales) Beispiel für Gleichheit in (1).

Aufgabe 6.3 Empirische Verteilungsfunktion als Martingal, 4 Punkte

Sei $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Folge von u.i.v. reelwertigen ZVen auf dem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, so dass $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Verteilungsfunktion von X_1 ist. Wir definieren die dazugehörige *empirische Verteilungsfunktion* durch

$$F_{-n}(x;\omega) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{\{X_k(\omega)\leq x\}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \omega \in \Omega, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Wir definieren

$$Y_n(x;\omega) := F_n(x;\omega) - F(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \omega \in \Omega, \quad n \in -\mathbb{N} \tag{3}$$

und $\mathcal{G}_{-n}(x) := \sigma(Y_{-n}(x), Y_{-n-1}(x), \ldots)$, $\mathcal{G}(x) := (\mathcal{G}_n(x))_{n\in-\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Folge $(Y_n(x))_{n\in-\mathbb{N}}$ ein $\mathcal{G}(x)$-Rückwärtsmartingal ist.

Aufgabe 6.4 U-Statistik, 4 Punkte

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine Borel-messbare Funktion. Sei $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Folge u.i.v. ZVen, so dass $\mathbb{E}[|g(X_1, X_2, \ldots, X_m)|] < \infty$. Wir definieren die *U-Statistik* durch

$$U_{-n} := \binom{n}{m}^{-1} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_m\in\mathbb{N}:\\ 1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n}} g(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}), \quad n \geq m, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Für $n \geq m$ definieren wir $\mathcal{G}_{-n} := \sigma\{U_{-k}\colon k \geq n\}$, $\mathcal{G} := (\mathcal{G}_{-n})_{n=m}^{+\infty}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(U_{-n})_{n=m}^{+\infty}$ ein $\mathcal{G}$-Rückwärtsmartingal ist.