Übungsblatt 7

Schwache Konvergenz

Abgabe am 02.12.2014

W-Theorie II @ Universität Duisburg-Essen

Dozent: Prof. Dr. Martin Hutzenthaler

Winter Semester 2014/15

Übungen: Dr. Anton Klimovsky

Aufgabe 7.1 Einige nützliche Räume stetiger Funktionen, 6 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass $C([0,1])$ eine abzählbare, dichte Teilmenge besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass der Raum $(C_\mathrm{b}([0,\infty)), \|\cdot\|_\infty)$ der stetigen, beschränkten Funktionen mit der Supremumsnorm nicht separabel ist.

(c) Zeigen Sie, dass der Raum $(C_\mathrm{c}([0,\infty)), \|\cdot\|_\infty)$ der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger separabel ist.

Aufgabe 7.2 Schwache Konvergenz und Konvergenz in Verteilung für Dirac-Maße, 4 Punkte

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge der reellen Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} x_n =: x_\infty \in \mathbb{R}$. Sei $\mu_n := \delta_{x_n}$ die entsprechenden Dirac-Maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Geben Sie $\mu_\infty := \text{w-}\lim_{n\to\infty} \mu_n$ an. (Begründen Sie Ihre Antwort.)

(b) Der Konkretheit halber sei $x_n := n^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen durch F_n die Verteilungsfunktion von μ_n und durch F_∞ die Verteilungsfunktion von μ_∞. Geben Sie die größte Menge $B \subset \mathbb{R}$ an, so dass $F_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_\infty(x)$ für alle $x \in B$.

Aufgabe 7.3 Zufällige unendliche binäre Folgen, 6 Punkte

Sei $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die Menge der (unendlichen) binären Folgen $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots)$ ausgestattet mit der Topologie, die durch die folgende Umgebungsbasis spezifiziert ist

$$N_l(\omega) := \left\{ \xi \in \Omega \colon \xi|_{[l]} = \omega|_{[l]} \right\}, \quad l \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

wobei wir die Notation $\omega|_{[l]} := (\omega_1, \dots, \omega_l)$, $\omega \in \Omega$, $l \in \mathbb{N}$ (in Worten: "die Projektion auf die ersten l Koordinaten") benutzen. Sei $\mathcal{B}(\Omega)$ die Borel-σ-Algebra, die durch die Umgebungsbasis (1) erzeugt ist.

Für $n \in 2\mathbb{N}$ sei A_n die Teilmenge von Ω, die durch

$$A_n := \left\{ \omega \in \Omega \colon \sum_{i=1}^{n} \omega_i = n/2, \quad \omega_i = 0 \text{ für alle } i > n \right\} \tag{2}$$

definiert ist. Wir betrachten die Folge der W-Maßen $(\nu_n)_{n\in 2\mathbb{N}}$, wobei ν_n die Gleichverteilung auf A_n ist. D.h. $\nu_n(\{\omega\}) := \binom{n}{n/2}^{-1}$ für $\omega \in A_n$ und $\nu_n(\{\omega\}) := 0$ sonst.

(a) Zeigen Sie, dass ν_n in der Tat ein W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ für alle $n \in 2\mathbb{N}$ ist.

(b) Wogegen konvergiert die Folge $(\nu_n)_{n\in 2\mathbb{N}}$ schwach für $n \to \infty$? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

  Hinweis: Benutzen Sie ohne Beweis den folgenden Fakt. Sei $h\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt, dass h gleichgradig stetig ist. D.h. es existiert eine Funktion $\delta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{l\to\infty} \delta(l) = 0$, so dass für alle $\omega \in \Omega$ und alle $\omega' \in N_l(\omega)$: $|h(\omega') - h(\omega)| \le \delta(l)$ gilt.