Übungsblatt 8

Schwache Konvergenz und Austauschbarkeit

Abgabe am 09.12.2014

W-Theorie II @ Universität Duisburg-Essen

Dozent: Prof. Dr. Martin Hutzenthaler

Winter Semester 2014/15

Übungen: Dr. Anton Klimovsky

Aufgabe 8.1 Austauschbare Partitionen und Stichprobenziehung, 8 Punkte

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum. Sei $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge der reellen Zahlen mit $s_i \geq 0$, $i \in \mathbb{N}$ und $\sum_{i=1}^{\infty} s_i \leq 1$. Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller solchen Folgen $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ausgestattet mit der Produkttopologie $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Sei $\mathrm{Part}(\mathbb{N})$ die Menge aller *Partitionen* von $\mathbb{N}$. D.h. für $\pi \in \mathrm{Part}(\mathbb{N})$ gilt $\pi = (\pi_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $\pi_i \subset \mathbb{N}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} \pi_i = \mathbb{N}$, $\pi_i \cap \pi_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Die Menge der Partitionen $\mathrm{Part}(\mathbb{N})$ ist metrisierbar mit dem Abstand

$$\rho(\pi, \pi') := \inf\left\{\frac{1}{n} : \pi|_{[n]} = \pi'|_{[n]}\right\}, \quad \pi, \pi' \in \mathrm{Part}(\mathbb{N}), \tag{1}$$

wobei $\cdot|_{[n]}$ die Projektion auf $\{1, \ldots, n\}$ bezeichnet. Jede Partition $\pi \in \mathrm{Part}(\mathbb{N})$ induziert eine *Äquivalenzrelation* auf $\mathbb{N}$

$$i \underset{\pi}{\sim} j \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists k \in \mathbb{N} : i, j \in \pi_k. \tag{2}$$

Sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion und sei $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ die *Gruppe* von allen solchen Bijektionen. Diese agieren auf Partitionen wie folgt

$$\sigma(\pi) = (\sigma^{-1}(\pi_i))_{i\in\mathbb{N}}. \tag{3}$$

Ein W-Maß auf $\mathrm{Part}(\mathbb{N})$ heißt *austauschbar*, falls das W-Maß invariant unter allen Transformationen σ aus (3) ist.

(a) Sei $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{P})$ und $\mathcal{L}[(s_i)_{i\in\mathbb{N}}] = \nu$. Sei $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u.i.v. ZVen mit Werten in $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und

$$\mathbb{P}\{m_n = k\} = s_k, \quad \mathbb{P}\{m_n = \infty\} = 1 - \sum_k s_k. \tag{4}$$

Wir betrachten nun die zufällige Partition $\pi =: \mathrm{Samp}(\nu)$ mit den Äquivalenzklassen

$$\{n \in \mathbb{N} : m_n = k\}, \quad k \in \mathbb{N} \tag{5}$$

und $\{n\}$, falls $m_n = \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}[\pi]$ austauschbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass sich jede austauschbare zufällige Partition π als $\mathrm{Samp}(\nu)$ für $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathrm{Part}(\mathbb{N}))$ darstellen lässt.

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von de Finetti und verfahren Sie wie folgt:

1. Sei $\pi(\omega)$ eine Stichprobe aus π, $\omega \in \Omega$. Für alle $i \in \mathbb{N}$ betrachten wir die $U[0,1]$-verteilte unabhängige ZV W_i. Wir definieren $V_n := W_i$, wobei $n \in \pi_i$.
2. Zeigen Sie, dass die Folge $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplett die Partition $\pi(\omega)$ beschreibt.
3. Zeigen Sie, dass die Folge $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ austauschbar ist. Benutzen Sie den Satz von de Finetti für $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 8.2 Gauß'sche Verteilung als eine δ-Folge, 4 Punkte

Seien $X, X_1, X_2, \ldots$ und $Y_1, Y_2, \ldots$ reelle ZVen. Es gelte $\mathcal{L}[Y_n] = \mathcal{N}(0, 1/n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Man zeige: Es gilt genau dann $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, wenn $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 8.3 Schwache vs. vage Konvergenz, 4 Punkte

Sei $E = \mathbb{R}$ und $\mu_n = \delta_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\underset{n\to\infty}{\text{v-lim}}\, \mu_n = 0, \tag{6}$$

jedoch ist $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht schwach konvergent.