Übungsblatt 9

Schwache Konvergenz

Abgabe am 16.12.2014

W-Theorie II @ Universität Duisburg-Essen

Dozent: Prof. Dr. Martin Hutzenthaler

Winter Semester 2014/15

Übungen: Dr. Anton Klimovsky

Aufgabe 9.1 Ein Kriterium für Straffheit auf $\mathbb{R}$, 4 Punkte

Zeigen Sie: Eine Familie $F \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ ist genau dann straff, wenn es eine messbare Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ gibt mit $f(x) \to +\infty$ für $|x| \to +\infty$ und $\sup_{\mu \in F} \int f \mathrm{d}\mu < +\infty$.

Aufgabe 9.2 Ein Kriterium für Straffheit der Gauß'schen Familien, 4 Punkte

Sei $L \subset \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ sowie $F := \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)\colon (\mu, \sigma^2) \in L\}$ eine Familie der Normalverteilungen mit Parametern in L. Zeigen Sie: F ist genau dann straff, wenn L beschränkt ist.

Aufgabe 9.3 Ein Kriterium für Straffheit der größenverzerrten Verteilungen, 4 Punkte

Ist P ein W-Maß auf $[0, +\infty)$ mit $m_P := \int xP(\mathrm{d}x) \in (0, +\infty)$, so definieren wir die *größenverzerrte Verteilung* $\hat{P}$ auf $[0, +\infty)$ durch

$$\hat{P}(A) := \frac{1}{m_P} \int_A xP(\mathrm{d}x). \tag{1}$$

Sei nun $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von ZVen auf $[0, +\infty)$ mit $\mathbb{E}[X_i] = 1$. Zeigen Sie: $(\widehat{P_{X_i}})_{i \in I}$ ist genau dann straff, wenn $(X_i)_{i \in I}$ gleichgradig integrierbar ist.

Aufgabe 9.4 Approximation der Gauß'schen ZVen durch Koordinaten einer Gleichverteilung auf einer großen Sphäre: Rotationsinvarianz, 4 Punkte

Zeigen Sie: Falls $X_n = (X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(n)})$ gleichverteilt auf der Fläche der Sphäre in $\mathbb{R}^n$ mit dem Radius $n \in \mathbb{N}$ und Zentrum bei $0 \in \mathbb{R}^n$ ist, so gilt $\mathcal{L}\left[X_n^{(1)}\right] \underset{n \to +\infty}{\Longrightarrow} \mathcal{N}(0, 1)$. (In Worten: die erste Koordinate der Gleichverteilung auf der Sphäre mit dem Radius n und Zentrum bei 0 konvergiert schwach gegen die Standardnormalverteilung.)

Anleitung:

A. Die Gleichverteilung auf der Sphäre ist durch die sphärische Rotationsinvarianz (Siehe (3) für die Definition) eindeutig charakterisiert (Ohne Beweis.)

B. Sei $Y_1, Y_2, \dots$ u.i. $\mathcal{N}(0, 1)$-verteilte ZVen. Zeigen Sie

$$X_n^{(i)} \overset{\mathcal{D}}{=} Y_i \left(\frac{n}{\sum_{j=1}^n Y_j^2} \right)^{\frac{1}{2}} =: Z_n^{(i)}. \tag{2}$$

Benutzen Sie dabei ohne Beweis, dass die Verteilung vom Zufallsvektor $Z = (Z_n^{(1)}, \dots, Z_n^{(n)})$ sphärisch rotationsinvariant ist. D.h.

$$\sum_{i=1}^n a_i Z_n^{(i)} \overset{\mathcal{D}}{=} Z_n^{(1)}, \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1. \tag{3}$$

C. Zeigen Sie mit Hilfe vom Satz von Slutzky [Satz 13.18, Klenke] und dem schwachen Gesetz der großen Zahlen, dass

$$\mathcal{L}\left[Z_n^{(i)}\right] \underset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} \mathcal{N}(0,1). \tag{4}$$