Übungsblatt 10
W-Maße auf Produkträumen

Abgabe am 13.01.2015

W-Theorie II @ Universität Duisburg-Essen

Dozent: Prof. Dr. Martin Hutzenthaler

Winter Semester 2014/15

Übungen: Dr. Anton Klimovsky

Aufgabe 10.1 Schnittstabilität der Menge aller Rechteckzylinder, 4 Punkte

Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i \in I$, Messräume. Für jedes $i \in I$ sei $\mathcal{E}_i \subset A_i$ ein Teilsystem der messbaren Mengen.
Zeigen Sie: Ist jedes $\mathcal{E}_i$ schnittstabil, so ist $\mathcal{Z}^{\mathcal{E},R}$ schnittstabil, wobei $\mathcal{Z}^{\mathcal{E},R}$ die Menge aller Rechteckzylinder bezeichnet, s. [Definition 14.9, Klenke].

Aufgabe 10.2 Zylindermengen, 4 Punkte

Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i \in I$, Messräume.
Zeigen Sie:

$$\bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i = \bigcup_{J \subset I:\ J \text{ abzählbar}} \mathcal{Z}_J, \tag{1}$$

wobei $\mathcal{Z}_J$ die Menge der Zylindermengen mit Basis J bezeichnet, s. [Definition 14.9, Klenke].
Hinweis: Zeigen Sie, dass die rechte Seite eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 10.3 Faltungsformeln, 4 Punkte

Zeigen Sie die Faltungsformeln für:

(a) Poisson-Verteilung: $\mathrm{Poi}(\lambda_1) * \mathrm{Poi}(\lambda_2) = \mathrm{Poi}(\lambda_1 + \lambda_2)$ für alle $\lambda_1, \lambda_2 > 0$;

(b) Normalverteilung: $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2) * \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2) = \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ für alle $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ und $\sigma_1, \sigma_2 > 0$.

Aufgabe 10.4 Ornstein-Uhlenbeck-Übergangskern, 4 Punkte

Sei $\lambda > 0$. Für $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ definieren wir den Übergangskern p_t von $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ nach $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ durch

$$p_t(x, A) := \left(\frac{\lambda}{\pi(1 - \mathrm{e}^{-2\lambda t})} \right)^{\frac{1}{2}} \int_A \exp\left(-\frac{\lambda (y - x\mathrm{e}^{-\lambda t})^2}{1 - \mathrm{e}^{-2\lambda t}} \right) \mathrm{d}y, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{2}$$

(a) Welche Verteilung ist das W-Maß $p_t(x, \cdot)$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ für $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$?

(b) **[Chapman-Kolmogorov'sche Gleichung]** Zeigen Sie, dass $p_t \cdot p_s = p_{t+s}$ für $t, s > 0$.

Frohe Feiertage!