Übungsblatt 11
Charakteristische Funktionen

Abgabe am 20.01.2015

W-Theorie II @ Universität Duisburg-Essen

Dozent: Prof. Dr. Martin Hutzenthaler

Winter Semester 2014/15

Übungen: Dr. Anton Klimovsky

Aufgabe 11.1 Transformierten für die Poisson-Verteilung, 4 Punkte

Berechnen Sie die Laplace- und Fourier-Transformierten einer Poisson-verteilten ZV mit Erwartungswert $\lambda > 0$.

Aufgabe 11.2 Konvergenz von Poisson gegen Gauß, 4 Punkte

Sei $X_\lambda \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, wobei $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion der ZV

$$\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \tag{1}$$

gegen die charakteristische Funktion einer standard normalverteilten $\mathcal{N}(0,1)$ ZV für $\lambda \to +\infty$ punktweise konvergiert.

Aufgabe 11.3 Rekonstruktion der Verteilung anhand der charakteristischen Funktion, 4 Punkte

Sei

$$\chi_X(t) = \frac{1}{6}(4 + \mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}), \quad t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

die Fourier-transformierte (= charakteristische Funktion) der ZV X.
Geben Sie die Verteilungsfunktion der ZV X an. **Hinweis:** X ist eine einfache diskrete ZV.

Aufgabe 11.4 Chapman-Kolmogorov'sche Gleichung für Poisson-Prozess, 4 Punkte

Sei $\lambda > 0$. Wir betrachten die Familie der stochastischen Kernen $\nu := (\nu_t)_{t>0}$ von $(\mathbb{N}_0, 2^{\mathbb{N}_0})$ nach $(\mathbb{N}_0, 2^{\mathbb{N}_0})$ mit

$$\nu_t(x, \mathrm{d}y) := \delta_x * \mathrm{Pois}(\lambda t)(\mathrm{d}y), \quad t > 0. \tag{3}$$

Zeigen Sie: die Familie ν erfüllt die Chapman-Kolmogorov'sche Gleichung und bildet eine Markov'sche Halbgruppe.