Übungsblatt 12

Zentraler Grenzwertsatz und Freunde

Abgabe am 27.01.2015

W-Theorie II @ Universität Duisburg-Essen

Dozent: Prof. Dr. Martin Hutzenthaler

Winter Semester 2014/15

Übungen: Dr. Anton Klimovsky

Aufgabe 12.1 Laplace-Transformierten für Binomial- und Exponential-Verteilungen, 4 Punkte

Berechnen Sie die Laplace-Transformierten für

(a) Binomial-Verteilung: $\mathrm{Bin}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $p \in [0, 1]$.

(b) Exponential-Verteilung: $\mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

Aufgabe 12.2 Plancherel'sche Gleichung, 4 Punkte

Sei $\mu \in \mathcal{M}_\mathrm{f}(\mathbb{Z}^d)$ mit charakteristischer Funktion φ_μ. Zeigen Sie, dass die Plancherel'sche Gleichung gilt:

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu(\{x\})^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi)^d} |\varphi_\mu(t)|^2 \mathrm{d}t. \tag{1}$$

Aufgabe 12.3 Dichte anhand der integrierbaren charakteristischen Funktion, 4 Punkte

Sei μ ein W-Maß auf $\mathbb{R}$ mit integrierbarer charakteristischer Funktion φ_μ, d.h. $\varphi_\mu \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, wobei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ ist. Zeigen Sie, dass μ absolutstetig ist und die stetige und beschränkte Dichte $f = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}$ gegeben ist durch

$$f(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} \varphi_\mu(t) \mathrm{d}t \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Aufgabe 12.4 Das asymptotische Verhalten einer Irrfahrt, 4 Punkte

Sei $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ die Position des Zufallswanderers nach $n \in \mathbb{N}$ Schritten, wobei die Schritte $(X_i)_{i=1}^\infty$ u.i.v. ZVen sind. Sei $p \in (0, 1)$ und $\mathbb{P}\{X_1 = -1\} = p$, $\mathbb{P}\{X_1 = 1\} = 1 - p$.

(a) **[Eine symmetrische Irrfahrt]** Sei $p = 1/2$. Zeigen Sie, dass für die Position des Zufallswanderers S_n nach n Schritten gilt

$$S_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{=}} \bar{o}(n^{\frac{1}{2}+\epsilon}) \quad \text{für alle } \epsilon > 0. \tag{3}$$

D.h.

$$\frac{S_n}{n^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0 \quad \text{für alle } \epsilon > 0. \tag{4}$$

(b) **[Eine Irrfahrt mit Drift]** Sei $p \neq 1/2$. Zeigen Sie, dass $S_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{f.s.}}{\sim}} (1 - 2p)n$. D.h.

$$\frac{S_n}{(1-2p)n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.}} 1. \tag{5}$$

Hinweis: Benutzen Sie die Ihnen bekannten Grenzwertsätze.