Übungsblatt 13
Probeklausur

wird am 05.02.2015 besprochen

W-Theorie II @ Universität Duisburg-Essen

Dozent: Prof. Dr. Martin Hutzenthaler

Winter Semester 2014/15

Übungen: Dr. Anton Klimovsky

Aufgabe 13.1 Martingale, 4 Punkte

Sei $a, b \in \mathbb{R}$ und sei X und Y Martingale bzgl. einer Filtration $\mathbb{F}$. Zeigen Sie:

(a) $aX + bY$ ist ein $\mathbb{F}$-Martingal;

(b) $\max\{X, Y\}$ ist ein $\mathbb{F}$-Submartingal.

Aufgabe 13.2 Optional Stopping, 6 Punkte

Seien $(X_k)_{k=1}^\infty$ u.i.v. ZVen mit $X_1 \in \mathcal{L}^2$, $\mathbb{E}[X_1] = 0$. Zeigen Sie für $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$:

(a) Sei T und T' Stoppzeiten mit $T \geq T'$ f.s. Dann gilt

$$\mathbb{E}[S_T^2] \geq \mathbb{E}[S_{T'}^2]. \tag{1}$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal ist.

(b) Sei T eine integrierbare Stoppzeit (d.h. $\mathbb{E}[T] < \infty$). Dann gilt

$$\mathrm{Var}[S_T] = \mathrm{Var}[X_1]\mathbb{E}[T]. \tag{2}$$

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie, dass $(S_n^2 - n\mathrm{Var}[X_1])_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal ist. Außerdem verwenden Sie (a).

Aufgabe 13.3 Martingalkonvergenz, 4 Punkte

Seien $(X_k)_{k=1}^\infty$ u.i.v. ZVen mit $\mathbb{P}\{X_1 = 1\} = \mathbb{P}\{X_1 = -1\} = 1/2$. Wir definieren

$$M_n := \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{k}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to +\infty$ f.s. konvergiert.

Aufgabe 13.4 Schwache Konvergenz, 4 Punkte

Sei $(X_k)_{k=1}^\infty$ eine Folge von $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$-verteilten ZVen mit $\text{w-}\lim_{n\to+\infty} X_n = X$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n^2 = \sigma^2 \in [0, +\infty). \tag{4}$$

Aufgabe 13.5 ZGS, 4 Punkte

Sei $(X_i)_{i=1}^\infty$ eine Folge von u.i.v. ZVen mit $\mathbb{E}[X_1] = 0$ und $\mathrm{Var}[X_1] = 1$. Zeigen Sie, dass die Folge von ZVen $\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{\sqrt{X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to +\infty$ gegen eine Gauß'sche ZV in Verteilung konvergiert. Geben Sie die Parameter dieses Grenzwertes (also den Erwartungswert und die Varianz) an.

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Slutsky.

Aufgabe 13.6 Stochastische Kerne, 4 Punkte

Sei $a > 0$. Wir betrachten die Familie der stochastischen Kerne $\nu := (\nu_u)_{u>0}$ von $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ nach $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit

$$\nu_u(x, \mathrm{d}y) := \delta_x * \mathrm{Cau}(au)(\mathrm{d}y), \quad u > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Zeigen Sie: die Familie ν erfüllt die Chapman-Kolmogorov'sche Gleichung und bildet eine Markov'sche Halbgruppe.

Hinweis: $\mathrm{Cau}(a)$ steht für die Cauchy-Verteilung mit Parameter a. Die charakteristische Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ für $\mathrm{Cau}(a)$ ist gegeben durch

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{-a|t|}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{6}$$