Übungen zur Vorlesung **Wahrscheinlichkeitstheorie I**

Übungsblatt 0

Grundlagen: Topologie

Ist d eine Metrik auf X, so bezeichnen wir mit τ_d die von d erzeugte Topologie (die Menge der bezüglich d offenen Mengen). Ein metrischer Raum (X, d) ist **vollständig**, falls jede Cauchy Folge konvergiert. Dabei ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine **Cauchy Folge**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) < \varepsilon \; \forall n, m > N.$$

Aufgabe 1 (**Metrik versus Topologie**).

(a) Zeige: Für Metriken d, r auf X mit $d(x, y) < r(x, y)$ für alle $x, y \in X$ gilt $\tau_d \subseteq \tau_r$.

(b) Seien d, r Metriken auf X. Zeige: Gibt es Konstanten $c, C > 0$ mit

$$c \cdot d(x, y) \; \geq \; r(x, y) \; \geq \; C \cdot d(x, y),$$

so induzieren d und r dieselbe Topologie.

($c^{\#}$) Sei $X =]0, 1]$ und $x_n = \frac{1}{n}$. Bezüglich der normalen (Euklidischen) Metrik ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge, die nicht konvergiert. Insbesondere ist X dann nicht vollständig. Gib nun eine andere Metrik d auf X mit der folgenden Eigenschaft an: d erzeugt dieselbe Topologie, wie die Euklidische Metrik, (x_n) ist keine Cauchy Folge bezüglich d, und (X, d) ist vollständig.

Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt, also

$$\mathcal{U} \subseteq \tau, \; X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \qquad \Rightarrow \qquad \exists n \in \mathbb{N}, \; U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U} : X = U_1 \cup \cdots \cup U_n.$$

Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt, wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Im allgemeinen topologischen Raum gilt diese Äquivalenz nicht.

Aufgabe 2 (**Kompaktheit**).

(a) Sei (X, d) kompakter metrischer Raum. Zeige: (X, d) ist separabel (es gibt eine abzählbare, dichte Teilmenge).

(b) Sei (X, d) kompakter metrischer Raum. Zeige: (X, d) ist vollständig.

Hinweis: *Verwende die Charakterisierung durch konvergente Teilfolgen.*

(c) Finde einen vollständigen, separablen metrischen Raum, der nicht kompakt ist.

Ein **polnischer Raum** (X, τ) ist ein vollständig metrisierbarer, separabler topologischer Raum. Es existiert also eine abzählbare, dichte Teilmenge und eine Metrik d, so dass (X, d) vollständig ist und $\tau = \tau_d$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (Polnische Räume).

(a) Zeige, dass $\mathbb{N}$ polnisch ist.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $\mathbb{R}^n$ polnisch ist.

(c) Sei d_{dis} die diskrete Metrik auf $\mathbb{R}$ ($d_{\text{dis}}(x, y) = 1$ für $x \neq y$). Zeige, dass $(\mathbb{R}, d_{\text{dis}})$ nicht polnisch ist.

(d$^{\#}$) Zeige, dass das offene Intervall $]0, 1[$ polnisch ist.

Mit $^{\#}$ markierte Aufgaben sind etwas schwerer
