Klimovsky/Löhr/Winter Sommersemester 2015

Übungen zur Vorlesung **Wahrscheinlichkeitstheorie I**

Übungsblatt 1

Mengensysteme

Sei Ω immer eine nicht-leere Menge.

Aufgabe 1.1 (Die leere Menge). **(3 Punkte)**

(a) Bestimme die von $\emptyset$ auf Ω erzeugte σ-Algebra $\sigma(\emptyset)$.

(b) Bestimme die Potenzmenge der Potenzmenge der leeren Menge.

(c) Bestimme die Anzahl der Elemente der Menge

$$\Big\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \emptyset \cup \{\emptyset\},\ \{\emptyset\} \cup \big\{\{\emptyset\}\big\},\ \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\},\ \big\{\{\emptyset\}\big\}\Big\}.$$

Aufgabe 1.2 (Von Partitionen erzeugte Mengensysteme). **(6 Punkte)**
Sei I eine Menge und $\pi = (\pi_i)_{i\in I}$ eine Partition von Ω, das heißt $\pi_i \cap \pi_j = \emptyset$ für $i \neq j$, und $\bigcup_{i\in I} \pi_i = \Omega$.

(a) Zeige, dass für die von π erzeugte σ-Algebra gilt:

$$\sigma(\pi) = \Big\{ \bigcup_{i\in J} \pi_i \;\Big|\; J \subseteq I \text{ mit } J \text{ abzählbar oder } I \setminus J \text{ abzählbar} \Big\}.$$

(b) Bestimme das von π erzeugte Dynkin-System.

(c) Bestimme die von π erzeugte Topologie.

Aufgabe 1.3 (Beispiele). **(3 Punkte)**

(a) Gib zwei σ-Algebren auf derselben Menge Ω an, deren Vereinigung keine σ-Algebra ist.

(b) Finde ein Dynkin-System, das keine σ-Algebra ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 1.4 (Folgen von Mengen). **(4 Punkte)**
Es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen $A_n \subseteq \Omega$. Das Komplement einer Menge B sei $\complement B := \Omega \setminus B$. Der *untere bzw. obere Mengenlimes* der Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist definiert als die Menge

$$A_* := \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq m} A_n \qquad \text{bzw.} \qquad A^* := \limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} A_n.$$

(a) Beschreibe (verbal), welche Elemente in A_* bzw. A^* liegen.

(b) Zeige: $A_* \subset A^*$.

(c) Zeige: $\complement A_* = \limsup_{n\to\infty}(\complement A_n)$, und $\complement A^* = \liminf_{n\to\infty}(\complement A_n)$.

(d) Zeige, dass für $\omega \in \Omega$ gilt:

$$\mathbb{1}_{A_*}(\omega) = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{1}_{A^*}(\omega) = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega).$$

Hierbei bezeichnet „lim sup“ bzw. „lim inf“ die aus der Analysis für Zahlenfolgen bekannten Begriffe und $\mathbb{1}_B$ die *Indikatorfunktion der Menge B*, definiert als:

$$\mathbb{1}_B(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } \omega \in B \\ 0, & \text{wenn } \omega \notin B \end{cases} .$$

Abgabe Di, 21.04. bis 12:00 in den Übungskasten

Arbeitsgruppenvorträge:
Am **14.04.** gibt Stefan Tappe (Universität Hannover) einen Vortrag über

Invariance of closed convex cones for stochastic partial differential equations

Abstract: In this talk, we provide necessary and sufficient conditions for stochastic invariance of closed convex cones in Hilbert spaces for semilinear stochastic partial differential equations driven by Wiener processes and Poisson random measures. Several examples accompany our results.

Am **21.04.** gibt Nikolaus Schweizer (Universität Duisburg-Essen) einen Vortrag über

Perturbation theory for Markov chains via Wasserstein distance

Hierzu ergeht eine herzliche Einladung. Zeit: **Di, 16:15 – 17:15**. Raum: WSC-S-U-3.03