Klimovsky/Löhr/Winter Sommersemester 2015

Übungen zur Vorlesung **Wahrscheinlichkeitstheorie I**

Übungsblatt 2

Borelsche σ-Algebra

Aufgabe 2.1 (Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$). **(4 Punkte)**
Zeige: die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ wird von jedem der folgenden Mengensysteme erzeugt:

(a) $\{ A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ abgeschlossen} \}$.

(b) $\{ A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ kompakt} \}$.

(c) $\{ B_r(x) \mid r \in \mathbb{Q}_+,\, x \in \mathbb{Q}^n \}$. Dabei ist $B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid |x-y| < r \}$ die (offene) Kugel um $x \in \mathbb{R}^n$ mit Radius $r \geq 0$.

Aufgabe 2.2 (Einfache (Gegen-)Beispiele). **(4 Punkte)**
Beweise oder widerlege für beliebige Räume X:

(i) Jede σ-Algebra auf X ist auch eine Topologie auf X.

(ii) Ist τ eine Topologie auf X, so bildet das System aller offenen und aller abgeschlossenen Teilmengen von X eine σ-Algebra auf X.

(iii) Ist U eine abzählbare Basis der Topologie τ, so ist die von U erzeugte σ-Algebra gleich der Borel-σ-Algebra.

(iv) Sei I beliebige Indexmenge. Ist $\mathcal{A} := \{A_i \colon i \in I\}$ eine Algebra, so besteht die von $\mathcal{A}$ erzeugte σ-Algebra aus den Mengen der Form $\bigcap_{i\in I'} A_i$ und $\bigcup_{i\in I''} A_i$ mit $I', I'' \subset I$.

Hinweis. Benutze, dass $\mathcal{B}(X)$ i.a. nicht mit der Potenzmenge auf X übereinstimmt.

Aufgabe 2.3. **(4 Punkte)**
Zeige, dass die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ Borel-messbar sind.

(a) $\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < f(x) \leq f(x)^2 \}$, wobei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine (gegebene) stetige Funktion ist.

(b) Die Menge der algebraischen Zahlen. Dabei heißt eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ *algebraisch*, falls sie Nullstelle eines nicht-konstanten Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 2.4 (**Messbarkeit von Stetigkeitsstellen**). **(4 Punkte)**
Seien (X,d), (Y,r) metrische Räume, $f\colon X \to Y$ eine beliebige Funktion. Zeige, dass die Menge der Stetigkeitsstellen von f Borel-messbar ist.

Hinweis: *Betrachte Mengen des folgenden Typs:*

$$A_{\varepsilon,\delta} := \left\{ x \in X \;\middle|\; \exists u, v \in B_\delta(x)\colon r\big(f(u), f(v)\big) \geq \varepsilon \right\},$$

zeige, dass sie messbar sind, und drücke die Menge U_f der Unstetigkeitsstellen *von f mit ihrer Hilfe aus.*

Abgabe Di, 28.04. bis 12:00 in den Übungskasten

Arbeitsgruppenvorträge:
Am **21.04.** gibt Nikolaus Schweizer (Universität Duisburg-Essen) einen Vortrag über

Perturbation theory for Markov chains via Wasserstein distance

Abstract: Perturbation theory for Markov chains addresses the question how small differences in the transitions of Markov chains are reflected in differences between their distributions. We prove powerful and flexible bounds on the distance of the n-th step distributions of two Markov chains when one of them satisfies a Wasserstein contractivity condition.
Our work is motivated by the recent interest in approximate Markov chain Monte Carlo (MCMC) methods in the analysis of big data sets. By using an approach based on Lyapunov functions, we provide estimates for geometrically ergodic Markov chains under weak conditions. In an autoregressive model, our bounds cannot be improved in general. We illustrate our theory by showing quantitative estimates for approximate versions of two prominent MCMC algorithms, the Metropolis-Hastings and stochastic Langevin algorithms.
This is joint work with Daniel Rudolf (University of Jena)

Hierzu ergeht eine herzliche Einladung. Zeit: **Di, 16:15 – 17:15**. Raum: WSC-S-U-3.03