Übungen zur Vorlesung **Wahrscheinlichkeitstheorie I**

Übungsblatt 3

Mengenfunktionen

Aufgabe 3.1 (Beispiele). (4 Punkte)

(a) Sei $\Omega := \{1, \dots, 4\}$ und $\mathcal{F} := \{\{1,2\}, \{2,4\}, \{1,3\}, \{3,4\}\}$. Finde Wahrscheinlichkeitsmaße $\mu \neq \nu$ auf $(\Omega, \sigma(\mathcal{F}))$ mit $\mu(F) = \nu(F)$ für alle $F \in \mathcal{F}$.

(b) Finde eine Algebra $\mathcal{A} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{N}$ und einen Inhalt $\mu \colon \mathcal{A} \to [0,1]$ der *nicht* σ-stetig ist.

(c) Finde ein σ-endliches Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit

$$\mu\big([a,b]\big) = \infty \qquad \forall a < b.$$

(d) Gib einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ an, so dass μ *nicht* σ-endlich ist.

Aufgabe 3.2 ((Gegen-)Beispiele zur Fortsetzung von Maßen). (4 Punkte)
Betrachte $\Omega = \mathbb{R}$. Sei $\mathcal{F} = \{ A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ endlich} \}$, $\mathcal{A}_0$ die von $\mathcal{F}$ erzeugte Algebra, und $\mathcal{A}$ die von $\mathcal{A}_0$ erzeugte σ-Algebra.

(a) Für $A \in \mathcal{A}_0$ Sei

$$\mu_0(A) = \begin{cases} 1, & A \text{ unendlich}, \\ 0, & A \text{ endlich}. \end{cases}$$

Zeige, dass μ_0 ein Inhalt auf $\mathcal{A}_0$ ist. Lässt sich μ_0 zu einem Maß auf $\mathcal{A}$ fortsetzen? (mit Begründung)

(b) Finde zwei verschiedene, endliche Maße $\mu \neq \nu$ auf $\mathcal{A}$, die auf dem $\cap$-stabilen Erzeuger $\mathcal{F}$ übereinstimmen.

(c) Lassen sich die Maße μ und ν aus (b) als Wahrscheinlichkeitsmaße wählen?

Aufgabe 3.3 (Inhalte und Subadditivität). (4 Punkte)
Sei $\mathcal{A}$ ein Semiring und μ ein Inhalt auf $\mathcal{A}$. Seien $A, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeige:

(a) Es existieren disjunkte Mengen $D_1, \dots, D_m \in \mathcal{A}$, $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j = \biguplus_{k=1}^{m} D_k. \tag{1}$$

Hinweis: *Benutze die vollständige Induktion bzgl. n.*

Bitte wenden!

(b) **[Monotonie]** Seien nun $A_1, \dots A_n$ disjunkt und $\biguplus_{j=1}^n A_j \subseteq A$, dann gilt

$$\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) \leq \mu(A). \tag{2}$$

Hinweis: *Benutze* (a)*.*

(c) **[Subadditivität]** Sei $A \subseteq \bigcup_{j=1}^n A_j$, wobei $A_1, \dots, A_n$ nicht unbedingt disjunkt. Dann gilt

$$\mu(A) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j). \tag{3}$$

Hinweis: *Betrachte* $\widetilde{A}_j := (A \cap A_j) \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1}(A \cap A_k)$ *und wende* (a) *auf diese Mengen an. Anschließend benutze* (b)*.*

Aufgabe 3.4 (**Teilräume**). **(4 Punkte)**
Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $A \in \mathcal{A}$. Die Einschränkung von $\mathcal{A}$ auf A ist $\mathcal{A}\restriction_A := \{ B \subseteq A \mid B \in \mathcal{A} \}$.

(a) Zeige, dass $\mathcal{A}\restriction_A$ eine σ-Algebra ist.

(b) Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(A, \mathcal{A}\restriction_A)$. Definiere $\bar{\mu}(B) = \mu(B \cap A)$ für alle $B \in \mathcal{A}$. Zeige, dass $\bar{\mu}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist.

(c) Sei nun Ω ein topologischer Raum und $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$ die Borelsche σ-Algebra. Zeige, dass $\mathcal{B}(A) = \mathcal{A}\restriction_A$, wobei A natürlich mit der Teilraumtopologie versehen ist.

Abgabe Di, 05.05. bis 12:00 in den Übungskasten

Arbeitsgruppenvorträge:
Am **05.05.** gibt PhD Alexander Kulikov (Moscow Institute of Physics and Technology) einen Vortrag über

Hedging price risk in commodity markets in presence of volumetric and currency risk

Hierzu ergeht eine herzliche Einladung. Zeit: **Di, 16:15 – 17:15**. Raum: WSC-S-U-3.03