# Übungen zur Vorlesung **Wahrscheinlichkeitstheorie I**

## Übungsblatt 4

## Fortsetzung von Maßen

**Aufgabe 4.1 (Vervollständigung von Maßräumen).** **(5 Punkte)**
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{N} := \{ N \subseteq X \mid \exists A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0,\ N \subseteq A \}$ die Menge aller Teilmengen von $\mu$-Nullmengen. Sei

$$\mathcal{A}_\mu := \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}).$$

(a) Zeige, dass $\mathcal{N}$ $\sigma$-$\cup$-stabil ist, und $\emptyset \in \mathcal{N}$.

Bemerkung: *Ein Mengensystem mit diesen beiden Eigenschaften heißt* $\sigma$-Ideal.

(b) Zeige, dass $\mathcal{A}_\mu = \{ A \cup N \mid A \in \mathcal{A},\ N \in \mathcal{N} \}$.

(c) Zeige, dass $\tilde{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$ ein Maß auf $\mathcal{A}_\mu$ definiert.

(d) Zeige, dass der Maßraum $(X, \mathcal{A}_\mu, \tilde{\mu})$ vollständig ist (d.h. Teilmengen von $\tilde{\mu}$-Nullmengen sind $\mathcal{A}_\mu$-messbar).

(e) Bestimme $\mathcal{A}_\mu$ für $\mathcal{A} := \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $\mu := \delta_x$ mit $x \in \mathbb{R}$. Hierbei ist $\delta_x$ das Dirac-Maß, definiert durch $\delta_x(A) = \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ für $A \in \mathcal{A}$.

**Aufgabe 4.2 (Zylindermengen).** **(3 Punkte)**
Sei $\Omega := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen aus Nullen und Einsen. Mengen der Form

$$[a_1, \dots, a_n] := \{ \omega = (\omega_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \Omega \mid \omega_k = a_k,\ k = 1, \dots, n \}$$

für $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \{0,1\}$, heißen *Zylindermengen.* Wir definieren

$$\mathcal{Z}_n := \big\{ [a_1, \dots, a_n] \bigm| a_1, \dots, a_n \in \{0,1\} \big\}, \qquad \mathcal{Z} := \{\emptyset\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{Z}_n, \qquad \mathcal{A} := \sigma(\mathcal{Z}).$$

(a) Zeige, dass $\mathcal{Z}$ ein Semiring ist.

(b) Sei $\Omega$ mit der Metrik

$$d(x,y) := \sup_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} |x_n - y_n|$$

versehen. Zeige, dass $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$.

(c) Zeige: $(\Omega, d)$ ist ein kompakter metrischer Raum.

Hinweis: *Ein topologischer Raum ist genau dann kompakt, wenn jede Überdeckung vom Raum mit den offenen Mengen eine Überdeckung mit* ***endlich vielen*** *offenen Mengen enthält.*

Bitte wenden!

**Aufgabe 4.3** (**Bernoulli-Maß**). **(4 Punkte)**
Seien $\Omega$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{A}$ wie in Aufgabe 4.2, $p \in [0,1]$, und (mit der Konvention $0^0 = 1$)

$$\mu\big([a_1, \dots, a_n]\big) := \prod_{i=1}^{n} p^{a_i}(1-p)^{1-a_i}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zeige, dass $\mu$ ein Inhalt auf $\mathcal{Z}$ ist.

(b) Seien $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{Z}$ mit $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Zeige, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Hinweis: *Verwende* Aufgabe 4.2(b).

(c) Zeige, dass sich $\mu$ eindeutig zu einem Maß auf $\mathcal{A}$ fortsetzen lässt.

Hinweis: *Verwende Teil* (b).

**Aufgabe 4.4** (**Menge der additiven Zerleger ist $\sigma$-Algebra**). **(4 Punkte)**
Sei $\mu^*$ ein äußeres Maß auf $\Omega$ und

$$\mathcal{M}(\mu^*) := \left\{ A \subseteq \Omega \;\middle|\; \forall E \subseteq \Omega : \mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(\complement A \cap E) \right\}$$

die Menge der $\mu^*$-messbaren Mengen.

(a) Zeige, dass $\mathcal{M}(\mu^*)$ durchschnittsstabil ist.

(b) Zeige, dass $\mathcal{M}(\mu^*)$ ein Dynkin-System ist.

Hinweis: *Zeige zunächst induktiv* $\mu^*\big(E \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i\big) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i)$ *für disjunkte* $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}(\mu^*)$.

(c) Zeige, dass $\mathcal{M}(\mu^*)$ eine $\sigma$-Algebra ist.

---

Abgabe bis Di, 12.05. am Anfang der Übungsstunde

---

**Arbeitsgruppenvorträge:**
Am **05.05.** gibt PhD Alexander Kulikov (Moscow Institute of Physics and Technology) einen Vortrag über

Hedging price risk in commodity markets in presence of volumetric and currency risk

Am **12.05.** gibt Prof. Albert Shiryaev (Steklov Mathematical Institute, Moscow) einen Vortrag.

Hierzu ergeht eine herzliche Einladung. Zeit: **Di, 16:15 – 17:15**. Raum: WSC-S-U-4.01