Übungen zur Vorlesung **Wahrscheinlichkeitstheorie I**

Übungsblatt 6

Bildmaße, Verteilungen & Unabhängigkeit

Aufgabe 6.1. **(4 Punkte)**
Sei X eine reellwertige Zufallsvariable, deren Verteilung die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = |x|e^{-x^2}$$

besitzt. Setze $Y = X^2$ und berechne die Verteilungsfunktion und die Wahrscheinlichkeitsdichte der Verteilung von Y.

Aufgabe 6.2 (Darstellung als Funktion einer gleichverteilten ZV). **(4 Punkte)**
Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ mit Verteilungsfunktion F_μ. Definiere

$$G_\mu\colon]0,1[\to \mathbb{R}, \qquad G_\mu(x) := \inf\{\, t \in \mathbb{R} \mid F_\mu(t) \geq x \,\}.$$

(a) Zeige, dass G_μ messbar ist.

(b) Sei λ das Lebesguemaß auf $]0,1[$. Berechne das Bildmaß λ_{G_μ} von λ unter G_μ.

(c) Sei X eine reellwertige Zufallsvariable und U gleichverteilt auf $[0,1]$. Finde eine messbare Funktion g_X, so dass $Y := g_X(U)$ dieselbe Verteilung hat wie X.

Bemerkung: *Wenn man mit einem Zufallsgenerator eine auf $[0,1]$ gleichverteilte ZV erzeugen kann, kann man somit vermöge g_X auch jede andere reellwertige ZV X erzeugen (falls man g_X berechnen kann).*

Aufgabe 6.3 (Unabhängigkeit von Ereignissen über Komplemente). **(4 Punkte)**
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, I eine Indexmenge, $A_i \in \mathcal{A}$ für $i \in I$. Setze $B_i^1 := A_i$ und $B_i^0 := \Omega \setminus A_i$. Zeige, dass die Folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Die Familie $(A_i)_{i\in I}$ ist unabhängig.

2. Es existiert ein $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I} \in \{0,1\}^I$, so dass die Familie $(B_i^{\alpha_i})_{i\in I}$ unabhängig ist.

3. Für alle $\alpha \in \{0,1\}^I$ ist die Familie $(B_i^{\alpha_i})_{i\in I}$ unabhängig.

Bitte wenden!

Aufgabe 6.4 (Transformation von Dichten). **(4 Punkte)**
Sei X ein C^1-Diffeomorphismus einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ auf eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^d$, d.h. X ist bijektiv und X, X^{-1} sind stetig differenzierbar. Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\big(U, \mathcal{B}(U)\big)$ mit Dichte g bezüglich des d-dimensionalen Lebesguemaßes λ^d.

(a) Zeige, dass das Bildmaß P_X (von P unter X) bezüglich λ^d die Dichte

$$\big(|\det DX|^{-1} \cdot g\big) \circ X^{-1}$$

hat. Dabei bezeichnet $\det DX$ die Funktionaldeterminante (Determinante der Jacobi-Matrix) von X.

Hinweis: *Der Transformationssatz aus der Analysis darf natürlich verwendet werden: Für alle integrierbaren Funktionen $f\colon V \to \mathbb{R}_+$ gilt*

$$\int_V f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_U f \circ X(y) \cdot \big|\det DX(y)\big|\,\mathrm{d}y.$$

(b) Berechne die Dichte von P_X für affin-lineares X, also

$$X(x) \;=\; Ax + b, \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

für eine gegebene $d \times d$-Matrix A und gegebenes $b \in \mathbb{R}^d$.

Abgabe bis Di, 09.06. am Anfang der Übungsstunde

Arbeitsgruppenvorträge:
Am **02.06.** gibt Dr. Hendrik Weber (University of Warwick) einen Vortrag über

SPDEs, criticality and renormalisation

Abstract: In this colloquium I will report on recent progress in the theory of stochastic PDEs and their connections with statistical mechanics. My main examples will be the KPZ equation and the dynamic Φ^4 model. Both of these equations arise as scaling limits of interacting particle systems: the KPZ equation as a scaling limit for surface growth models and the Φ^4 model as a scaling limit of an Ising-type model of a ferromagnet. The mathematical treatment of these equations is challenging due to the low regularity of the random "noise term" present. In particular, solutions are too irregular to apply the usual "deterministic" solution techniques. Even worse sometimes "infinite counterterms" have to be subtracted to produce non-trivial solutions. I will discuss this renormalisation procedure in some detail for the Φ^4 model. I will first explain, why this procedure is necessary and how it can be implemented mathematically. Then I will discuss the interpretation on the level of particle approximations.

Am **09.06.** gibt Prof. Andrea Barth (University of Stuttgart) einen Vortrag.

Hierzu ergeht eine herzliche Einladung. Zeit: **Di, 16:15 – 17:15**. Raum: WSC-S-U-3.03