Übungen zur Vorlesung **Wahrscheinlichkeitstheorie I**

Übungsblatt 7

Unabhängigkeit & 0-1 Gesetze

Aufgabe 7.1 (Faltung). **(4 Punkte)**
Das **Faltungsprodukt** $\mu * \nu$ zweier Wahrscheinlichkeitsmaße μ, ν auf $\mathbb{R}$ ist wie folgt definiert: Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}_X = \mu$ und $\mathbb{P}_Y = \nu$. Dann ist $\mu * \nu := \mathbb{P}_{X+Y}$ die Verteilung der Summe.
Sei poi_λ die Poissonverteilung mit Parameter $c > 0$, und $\lambda_{[0,1]}$ das Lebequemaß auf $[0,1]$.

(a) Berechne die Dichte von $\lambda_{[0,1]} * \mathrm{poi}_\lambda$.

(b) Zeige, dass $\quad \mathrm{poi}_\lambda * \mathrm{poi}_{c'} = \mathrm{poi}_{c+c'} \qquad \forall c, c' > 0.$

(c) Ist die Faltung zweier geometrischer Verteilungen wieder eine geometrische Verteilung?

Aufgabe 7.2 (Lemma von Borel-Cantelli). **(4 Punkte)**
Sei B_p die Bernoulli-Verteilung auf $\{0,1\}$ mit Parameter $p \in [0,1]$ (also $B_p(\{1\}) = p$). Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, wobei die Verteilung von X_n durch $B_{\frac{1}{n}}$ gegeben sei. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Folge konvergiert, d.h.

$$\mathbb{P}\big(\big\{\, \omega \in \Omega \;\big|\; X_n(\omega) \text{ konvergiert für } n \to \infty \,\big\}\big)?$$

Bemerkung: *Falls die Wahrscheinlichkeit* 1 *ist spricht man von* fast sicherer Konvergenz*.*

Aufgabe 7.3 (terminale σ-Algebra & Kolmogoroff'sches 0-1 Gesetz). **(4 Punkte)**

(a) Entscheide für die folgenden Mengen, ob sie im Allgemeinen in der terminalen σ-Algebra einer folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsvariablen enthalten sind.

$$1.\ \Big\{ \sup_{n\in\mathbb{N}} X_n > 1 \Big\} \qquad 2.\ \Big\{ \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \in [0,1] \Big\}$$

Wie immer ist hierbei $\{ \sup_n X_n > 1 \} := \{ \omega \in \Omega \mid \sup_n X_n(\omega) > 1 \}$, usw.

(b) Seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, unabhängig und jeweils gleichverteilt auf $\{-1, 1\}$. Definiere $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ und zeige, dass $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ fast sicher gilt (also $\mathbb{P}\big(\{ \limsup_{n\to\infty} S_n = \infty \}\big) = 1$).
Hinweis: *Verwende das 0-1 Gesetz und Symmetrie bezüglich Vorzeichenwechsel.*

Bitte wenden!

Aufgabe 7.4 (Box-Muller Methode). **(4 Punkte)**

(a) Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume, und P, Q Wahrscheinlichkeitsmaße auf Ω. Sei $\Phi\colon \Omega \to \Omega'$ ein **Borel Isomorphismus**, also bijektiv, messbar und mit messbarer Umkehrabbildung. Zeige, dass aus $P_\Phi = Q_\Phi$ schon $P = Q$ folgt.

(b) Seien U, V unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen,

$$X := \sqrt{-2\log(U)} \cdot \cos(2\pi V) \qquad \text{und} \qquad Y := \sqrt{-2\log(U)} \cdot \sin(2\pi V).$$

Zeige, dass X und Y unabhängig und jeweils standard normalverteilt sind (also normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz 1).

HINWEIS: *Verwende (a) mit* $P = \mathbb{P}_{(X,Y)}$ *und* Φ *gleich Polarkoordinatentransformation.*

Abgabe bis Di, 16.06. am Anfang der Übungsstunde

Arbeitsgruppenvorträge:

Am **09.06.** gibt Prof. Andrea Barth (University of Stuttgart) einen Vortrag.

Am **16.06.** gibt Prof. Stefan Ankirchner (Uni Jena) einen Vortrag.

Hierzu ergeht eine herzliche Einladung. Zeit: **Di, 16:15 – 17:15**. Raum: WSC-S-U-3.03