

Übungen zur Vorlesung **Wahrscheinlichkeitstheorie I**

Übungsblatt 8

LEBESGUE-INTEGRAL, ERWARTUNGSWERT, VARIANZ

Alle Zufallsvariablen seien auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definiert.

Aufgabe 8.1 (Transformationssatz). (4 Punkte)

- (a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X: \Omega \rightarrow E$ eine Zufallsvariable mit Werten in einem messbaren Raum $(E, \mathcal{E})$. Zeige: Für jede messbare Funktion $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ist $f \circ X$ genau dann integrierbar, wenn f bezüglich $\mathbb{P}_X$ integrierbar ist, und in diesem Falle gilt

$$\int_{\Omega} f \circ X \, d\mathbb{P} = \int_E f \, d\mathbb{P}_X.$$

- (b) Ein Würfel wird zwei Mal geworfen. Sei X die erste Augenzahl und Y die zweite. Definiere $Z := X + Y$. Bestimme mit Hilfe von (a) die Verteilung der ZV Z und zeige: $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$.

Aufgabe 8.2 (Dominierte Konvergenz). (4 Punkte)

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen mit $X_n \rightarrow X$ fast sicher (f.s.) für eine Zufallsvariable X . Zeige den Satz von der dominierten Konvergenz: Falls eine integrierbare Majorante, also eine integrierbare Zufallsvariable Y mit $|X_n| \leq Y$ f.s. für alle $n \in \mathbb{N}$, existiert, so ist X integrierbar und es gilt

$$\mathbb{E}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n).$$

Aufgabe 8.3 (Hölder- und Minkowski-Ungleichung). (4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- (a) Sei $f \in L^p$, $h \in L^q$. Zeige die *Hölder-Ungleichung*

$$\|fh\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|h\|_q.$$

HINWEIS: Benutze für $1 < p < \infty$ die *Young'sche Ungleichung*:

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \text{ für } a, b \geq 0.$$

- (b) Sei $f, g \in L^p$. Zeige die *Minkowski-Ungleichung* (Dreiecksungleichung in L^p)

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

HINWEIS: Benutze die Hölder-Ungleichung mit $h = |f + g|^{p-1}$.

Aufgabe 8.4 (2. Wald'sche Identität).**(4 Punkte)**

Seien $X_n, n \in \mathbb{N}$, unabhängig, identisch verteilte, quadratintegrierbare Zufallsvariablen, T eine $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ wertige, quadratintegrierbare Zufallsvariable, und T unabhängig von $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Setze

$$Z := \sum_{k=1}^T X_k, \quad \text{also} \quad Z(\omega) = \sum_{k=1}^{T(\omega)} X_k(\omega).$$

Zeige, dass Z quadratintegrierbar ist, und

$$\text{Var}(Z) = \mathbb{E}(T) \text{Var}(X_1) + \text{Var}(T) \mathbb{E}(X_1)^2.$$

Abgabe bis Di, 16.06. am Anfang der Übungsstunde

Arbeitsgruppenvorträge:

Am **9.06.** gibt Prof. Andrea Barth (University of Stuttgart) einen Vortrag.

Am **16.06.** gibt Prof. Stefan Ankirchner (Uni Jena) einen Vortrag.

Hierzu ergeht eine herzliche Einladung. Zeit: **Di, 16:15 – 17:15**. Raum: WSC-S-U-3.03