

Übungen zur Vorlesung **Wahrscheinlichkeitstheorie I**

Übungsblatt 10

**GESETZ DER GROßEN ZAHL & KONVERGENZ VON
ZUFALLSVARIABLEN****Aufgabe 10.1.****(4 Punkte)**

Sei $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, auf $[1, 2]$ gleichverteilter Zufallsvariablen und

$$Y_n := \left(\prod_{k=1}^n U_k \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Zeige, dass $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fast sicher konvergiert und bestimme den Grenzwert.

Aufgabe 10.2 (Schwachtes Gesetz für zufällige Summandenanzahl).**(4 Punkte)**

Sei $1 \leq \alpha < 2$ und $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängig identisch verteilter, quadratintegrierbarer Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_n) = 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei T_n eine $\mathbb{N}$ -wertige, quadratintegrierbare Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(T_n) \leq n^\alpha$, die von $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängig ist. Zeige, dass

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{T_n} X_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ in Wahrscheinlichkeit.}$$

HINWEIS: Verwende die Wald'schen Identitäten und Tschbyscheff.

Aufgabe 10.3.**(4 Punkte)**

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, exponentialverteilter Zufallsvariablen mit Parameter 1,

$$Y_n := \frac{X_n}{\log(n)}.$$

(a) Zeige, dass Y_n in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert.

(b) Zeige $\mathbb{P}\left(\left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} Y_n = 1 \right\}\right) = 1$. Insbesondere konvergiert Y_n nicht fast sicher.

HINWEIS: Zeige jeweils mit Borel-Cantelli: Y_n ist f.s. unendlich oft ≥ 1 ; und für jedes $\alpha > 1$ ist Y_n f.s. nur endlich oft $\geq \alpha$.

Aufgabe 10.4 (Anwendung von Borel-Cantelli auf Konvergenz).**(4 Punkte)**

Seien X sowie X_n , $n \in \mathbb{N}$, reellwertige Zufallsvariablen. Zeige:

- (a) Für alle $\varepsilon > 0$ gelte

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty. \quad (1)$$

Dann konvergiert $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fast sicher gegen X .

BEMERKUNG: Aus der stochastischen Konvergenz folgt bekanntlich nicht die fast sichere Konvergenz. (1) ist nun eine Bedingung an die Konvergenzgeschwindigkeit der stochastischen Konvergenz, die die fast sichere Konvergenz nach sich zieht.

- (b) Konvergiert $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stochastisch gegen X , so existiert eine Teilfolge $(X_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die fast sicher gegen X konvergiert.

HINWEIS: Verwende (a).

- (c) Gilt $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|X_n - X\|_1 < \infty$, so konvergiert (X_n) fast sicher gegen X . Hierbei ist wie gewöhnlich $\|\cdot\|_1$ die L^1 -Norm, also $\|X_n - X\|_1 = \mathbb{E}(|X_n - X|)$.

HINWEIS: Verwende (a).

Abgabe bis Di, 23.06. bis 12:00 in den Übungskasten

Arbeitsgruppenvorträge:

Am **16.06.** gibt Prof. Stefan Ankirchner (Uni Jena) einen Vortrag.

Am **23.06.** gibt PhD Vladimir Panov (HSE Moscow) einen Vortrag über

Semiparametric estimation in the normal variance-mean mixture model

Abstract: In this talk, I intend to present some fresh ideas concerning the estimation in the normal variance-mean mixture models. These models are closely related to the class of time-changed Lévy processes, and naturally appear in some interesting problems like modelling of the sizes of diamonds in marine deposits of South West Afrika. The focus of our research is the simultaneous estimation of all finite-dimensional parameters of the model and the mixing distribution.

Hierzu ergeht eine herzliche Einladung. Zeit: **Di, 16:15 – 17:15**. Raum: WSC-S-U-3.03