Übungen zur Vorlesung **Wahrscheinlichkeitstheorie I**

Übungsblatt 11

Radon-Nikodym & Bedingte Erwartung

Aufgabe 11.1 (Rechenregeln für Radon-Nikodym Ableitungen). (4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und ν, μ, α endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\nu \ll \mu \ll \alpha$.

(a) Zeige, dass die Kettenregel für die Radon-Nikodym-Ableitung gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \cdot \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\alpha} \qquad \alpha\text{-fast sicher (f.s.)}$$

(b) Es sei $f := \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ und es gelte zusätzlich $\mu \ll \nu$, also $\mu \equiv \nu$. Zeige, dass $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu} = \frac{1}{f}$ μ-f.s.

(c) Zeige, dass $f := \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}(\mu+\nu)}$ existiert und drücke $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ mit Hilfe von f aus.

Aufgabe 11.2 (einfache Radon-Nikodym Ableitungen). (4 Punkte)

(a) Ein Laplace-Würfel mit Werten 1 bis 6 werde 2-mal unabhängig geworfen. Sei P die Verteilung des Minimums, und Q die des Maximums der beiden Würfe. Bestimme $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}$.

(b) Sei λ das Lebesguemaß auf $[0,1]$, $f(x) := x^2$, und P das Bildmaß von λ unter f, also $P(A) := \lambda\big(f^{-1}(A)\big)$ für $A \in \mathcal{B}\big([0,1]\big)$. Berechne $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\lambda}$.

Aufgabe 11.3 (Diskrete Beispiele beingter Erwartungen). (4 Punkte)

(a) Sei X uniform verteilt auf $\{1,\ldots,6\}$, $Z := 42X - 1$, und $Y := \begin{cases} 1, & X \text{ ungerade} \\ 0, & X \text{ gerade} \end{cases}$.
Berechne die bedingten Erwartungen $\mathbb{E}(X \mid Y)$, $\mathbb{E}(X \mid Z)$ und $\mathbb{E}(Y \mid X)$.

(b) Ein Laplace-Würfel mit Werten 1 bis 6 werde 2-mal unabhängig geworfen. Sei X das Minimum, und Y das Maximum der beiden Würfe. Bestimme $\mathbb{E}(Y \mid X)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 11.4 (**Lebesgue-singuläres Maß ohne Atome**). **(4 Punkte)**
Seien $h_1, h_2 \colon [0,1] \to [0,1]$ definiert durch $h_1(x) = \frac{x}{3}$ und $h_2(x) = \frac{x+2}{3}$. Betrachte das Lebesguemaß λ auf $[0,1]$, sowie ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $[0,1]$ mit

$$P(A) \;=\; \tfrac{1}{2}P\big(h_1^{-1}(A)\big) + \tfrac{1}{2}P\big(h_2^{-1}(A)\big) \qquad \forall A \in \mathcal{B}\big([0,1]\big).$$

P heißt *Gleichverteilung auf der Cantormenge*, und die Existenz darf ohne Beweis vorausgesetzt werden.

(a) Zeige, dass P keinen zu λ absolut stetigen Anteil hat, also $P \perp \lambda$.

HINWEIS: *Setze* $A_0 = \,]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, *und rekursiv* $A_{n+1} = h_1(A_n) \cup h_2(A_n)$. *Berechne dann* $\lambda(A_n)$ *und* $P(A_n)$.

(b) Zeige, dass P keine Atome hat, also $P\big(\{\, x \,\}\big) = 0$ für alle $x \in [0,1]$ gilt.

HINWEIS: *Nimm an, es gibt ein Atom. Iteration mit* h_1, h_2 *führt dann zum Widerspruch.*

Abgabe Di, 30.06. bis 12:00 in den Übungskasten

Arbeitsgruppenvorträge:
Am **23.06.** gibt Vladimir Panov (HSE Moscow) einen Vortrag über

Semiparametric estimation in the normal variance-mean mixture model

Abstract: In this talk, I intend to present some fresh ideas concerning the estimation in the normal variance-mean mixture models. These models are closely related to the class of time-changed Lévy processes, and naturally appear in some interesting problems like modelling of the sizes of diamonds in marine deposits of South West Afrika. The focus of our research is the simultaneous estimation of all finite-dimensional parameters of the model and the mixing distribution.

Am **30.06.** gibt Ryan Kurniawan (ETH Zurich) einen Vortrag.

Hierzu ergeht eine herzliche Einladung. Zeit: **Di, 16:15 – 17:15**. Raum: WSC-S-U-3.03