Übungen zur Vorlesung **Wahrscheinlichkeitstheorie I**

Übungsblatt 12

Bedingte Erwartungen und Kerne

Aufgabe 12.1 (Beispiele bedingter Erwartungen). **(4 Punkte)**

(a) Seien X, Y unabhängig und exponentialverteilt zum Parameter 2.
Berechne $\mathbb{E}(e^X + e^Y \mid X)$.

(b) Seien X, Y unabhängig und auf $[0,1]$ gleichverteilt, sowie $M = \max(X,Y)$. Zeige, dass $\mathbb{E}(X \mid M) = \frac{3}{4}M$.

Hinweis: *Berechne zunächst die Dichtefunktion von M.*

(c) Seien U, V unabhängig und auf $[0,1]$ gleichverteilt. Berechne $\mathbb{E}(U^V \mid U)$.

Aufgabe 12.2 (Gegenbeispiele). **(4 Punkte)**

(a) Sei $a > \mathbb{E}(X)$. Gilt dann immer $\{\, \omega \in \Omega \mid \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F})(\omega) \geq a \,\} \subseteq \{\, \omega \mid X(\omega) \geq a \,\}$?

(b) Konstruiere *nicht* unabhängige Zufallsvariablen X, Y, für die $\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(X)$ gilt.

Bemerkung: *Solche Zufallsvariablen heißen **unkorreliert**.*

(c) Finde eine reellwertige Zufallsvariable X und teil σ-Algebren $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ mit

$$\mathbb{E}\big(\,\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) \,\big|\, \mathcal{G}\,\big) \neq \mathbb{E}\big(\,\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \,\big|\, \mathcal{F}\,\big) \text{ f.s.}$$

Aufgabe 12.3 (Eigenschaften bedingter Erwartungen). **(4 Punkte)**
Seien X und Y quadratintegrierbar.

(a) Zeige: $\mathbb{E}\big(X\, \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F})\big) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F})\, Y\big)$ f.s.

(b) Wir interpretieren $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F})$ als Schätzung von X bei Kenntnis von $\mathcal{F}$. Zeige, dass sich der quadratische Fehler beim schrittweisen Bedingen auf ineinander enthaltene σ-Algebren, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, im folgenden Sinne additiv verhält:

$$\big\| \,\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) - X \,\big\|_2^2 = \big\| \,\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) - X \,\big\|_2^2 + \big\| \,\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \,\big\|_2^2.$$

Wie immer ist dabei $\|X\|_2^2 := \mathbb{E}(X^2)$. Insbesondere ist also der Fehler bei Vorliegen von mehr Information ($\mathcal{G}$) kleiner, als wenn weniger Information ($\mathcal{F}$) verfügbar ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 12.4 (**Kerne**). **(4 Punkte)**

Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2$ messbare Räume, K ein (Markov-)Kern von $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$. Definiere Wahrscheinlichkeitsmaße μK auf $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ und $\mu \otimes K$ auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ durch

$$\mu K(B) = \int K(x, B)\, \mu(\mathrm{d}x) \qquad \text{und} \qquad \mu \otimes K(A \times B) = \int_A K(x, B)\, \mu(\mathrm{d}x) \tag{1}$$

für $A \in \mathcal{A}_1$, $B \in \mathcal{A}_2$.

Bemerkung: *Dass $\mu \otimes K$ durch (1) auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ eindeutig definiert ist folgt aus dem Fortsetzungs- und Eindeutigkeitssatz von Carathéodory für Semiringe.*

Seien X, Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilung $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mu \otimes K$.

(a) Gib die Verteilung von X und die Verteilung von Y an.

(b) Gib (eine Version der) bedingten Verteilung von Y gegeben X an, also $\mathbb{P}\big(\{ Y \in B \} \bigm| X \big)$ für $B \in \mathcal{A}_2$.

Abgabe Di, 07.07. bis 12:00 in den Übungskasten

Arbeitsgruppenvorträge:

Am **30.06.** gibt Ryan Kurniawan (ETH Zurich) einen Vortrag über

Numerical approximations of stochastic partial differential equations with superlinearly growing nonlinearities

Abstract: In this talk, we study numerical approximations of stochastic partial differential equations (SPDEs) with superlinearly growing nonlinearities. We first give examples of some of such SPDEs, including stochastic Burgers equations, stochastic 2-D Navier-Stokes equations, Cahn-Hilliard-Cook type equations, and stochastic Kuramoto-Sivashinsky equations. We then show that the fully discrete exponential Euler method converges in the almost sure sense with some rate for all of the aforementioned examples of SPDEs. Finally, we will discuss about a work in progress on how to use this result to show that a newly proposed scheme, called the fully discrete nonlinearity-stopped exponential Euler method, converges strongly in the L^p-norm for all $p \in (0, 2)$ for all of the aforementioned examples of SPDEs.

Am **07.07.** findet **kein** Vortrag statt.

Hierzu ergeht eine herzliche Einladung. Zeit: **Di, 16:15 – 17:15**. Raum: WSC-S-U-3.03