Klimovsky/Löhr/Winter Sommersemester 2015

Wahrscheinlichkeitstheorie I

29.06.2015 PROBEKLAUSUR **(32 Punkte)**

Aufgabe 1. **(3 Punkte)**

(a) Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume. Definiere, wann eine Funktion $f\colon \Omega \to \Omega'$ messbar ist.

(b) Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{y \sin(2\pi y)}{\sqrt{1+y}}\, dy$. Zeige, dass f Borel messbar ist.

Aufgabe 2. **(4 Punkte)**

(a) Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ mit Verteilungsfunktion F_μ. Sei $x \in \mathbb{R}$. Drücke $F_\mu(x)$ durch μ aus.

(b) Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter 1, $Y = e^{-X}$. Bestimme die Verteilungsfunktion F_Y von Y.

Aufgabe 3. **(4 Punkte)**
Eine Münze mit Werten in $\{K, Z\}$ und Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ für K werde unendlich oft unabhängig geworfen. Sei X_n das Resultat des n-ten Wurfs und

$$A_n = \{\, X_{n+1} = X_{n+2} = \cdots = X_{2n} = K \,\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

das Ereignis, dass nach dem n-ten Wurf mindestens n-mal in Folge K kommt. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass dies für unendlich viele n passiert.

Aufgabe 4. **(5 Punkte)**
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, auf $[0,1]$ gleichverteilter Zufallsvariablen und

$$Y_n := \min_{k\in\{1,\dots,n\}} X_k.$$

(a) Entscheide und begründe, ob $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Wahrscheinlichkeit konvergiert.

(b) Entscheide und begründe, ob $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher konvergiert.

Aufgabe 5. **(4 Punkte)**
Für $n \in \mathbb{N}$ sei X_n Poisson verteilt mit Parameter n. Zeige, dass $Y_n := \dfrac{X_n}{n}$ in Wahrscheinlichkeit gegen 1 konvergiert.

Bitte wenden!

Aufgabe 6. **(7 Punkte)**

Seien X und Y reellwertige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

(a) Definiere, wann X und Y unabhängig sind.

(b) Zeige: Ist X fast sicher konstant, so sind X und Y immer unabhängig.

(c) Zeige: Ist X unabhängig von sich selbst, so ist $\mathbb{P}\big(\{\, X \in B \,\}\big) \in \{0, 1\}$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(d) Zeige: X ist genau dann unabhängig von sich selbst ist, wenn X fast sicher konstant ist.

Aufgabe 7. **(5 Punkte)**

(a) Seien X und Y $\mathbb{R}$-wertige, integrierbare Zufallsvariablen, die eine gemeinsame Dichte $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ (bzgl. des Lebesguemaßes) besitzen. Drücke die bedingte Dichte $f_{Y|X=x}$ von Y gegeben X durch f aus ($x \in \mathbb{R}$).

(b) Seien U, V unabhängig und auf $[0, 1]$ gleichverteilt. Berechne $\mathbb{E}\big(\sqrt{U+V} \bigm| U\big)$.

(c) Seien X, Y unabhängig, gleichverteilt auf $[0, 1]$. Berechne $\mathbb{E}(X \mid X + Y)$.

Die Klausur findet am 15.07.2015 in der Vorlesung statt.
In der Übung am 14.07. können nach Besprechung des letzten (kürzeren) Übungsblattes Fragen zur Probeklausur gestellt werden.

Hinweise:

(a) Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

(b) Es sind keine weiteren Hilfsmittel (ausser Stifte, Radiergummi, etc.) zugelassen.

(c) Zur Lösung einer Teilaufgabe dürfen die vorangegangenen Teilaufgaben auch dann verwendet werden, wenn sie nicht gelöst wurden. Bei Verwendung nachfolgender Teilaufgaben gibt es nur dann volle Punktzahl, wenn auch die nachfolgenden Aufgaben gelöst wurden, ohne dass ein Zirkelschluss entstanden ist.

(d) Das Thema *Ergodensatz* kommt in der Klausur nicht mehr dran, kann aber in einer Nachklausur vorkommen.